A XIII-a Conferinţă Naţională multidisciplinară – cu participare internaţională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2013

CONSIDERAŢII PRIVIND OPORTUNITATEA UTILIZĂRII MODELULUI EULER-BERNOULLI PENTRU BARE DE DIFERITE LUNGIMI

Carla PROTOCSIL, Gilbert-Rainer GILLICH

CONSIDERATIONS THE USE OF EULER-BERNOULLI MODEL FOR BEAMS OF DIFFERENT LENGTHS

This paper presents a study of dynamic behaviour for different lengths of beams, preserving constant section. The natural frequencies on beams, for 8 bending vibration modes after weak axis were determinates using EB model and by FEM analysis. The comparative study showed that for long lengths, the model is sufficiently precise, while the lengths of the beams the errors are significant. The comparative study showed that for long beams the model is very precise, while the shorter lengths the errors are significant.

Cuvinte cheie: vibraţii, modul formei de vibraţie, frecvenţe, metoda Euler-Bernoulli
Keywords: vibrations, mode shape, frequencies, the Euler-Bernoulli method

1. Introducere

Teoria matematică a încovoierii le aparţine lui Leonhard Euler (1707-1783) şi Daniel Bernoulli (1700-1782). Euler face şi primele studii de stabilitate, stabilind celebrele formule care-i poartă numele. Modelul Euler-Bernoulli include relaţia între încovoiere şi energia cinetică a deplasării laterale. Jacob Bernoulli a descoperit că, curbura unei grinzi elastice, în orice punct, este proporţională cu momentul încovoietor în

acel punct. Daniel Bernoulli (nepotul lui Jacob) a fost primul care a formulat ecuaţia diferenţială de mişcare a unei grinzi cu vibraţie. Mai târziu, teoria lui Jacob Bernoulli a fost acceptată de Leonhard Euler în căutarea unei forme a grinzilor elastice, în diverse condiţii de încărcare. Teoria barei Euler-Bernoulli (E-B), care este numită uneori şi teoria clasică a barelor, este destul de exactă, dar tinde uneori să supraestimeze uşor frecvenţele naturale [1].

Alte abordări cunoscute în literatura de specialitate sunt: modelul Rayleigh (R), modelul Shear (Sh) şi modelul Timoshenko (T). În tabelul 1 este prezentat un sumar al celor patru teorii, fiecare model având o mai mare sau mai mică influenţă a încărcărilor interne sau externe [1].

Tabelul 1

Modele de grinzi	Momentul încovoietor	Deplasarea laterală	Deformaţia la forfecare	Inerţia la rotire
(E-B)	√	√	x	x
(R)	√	√	x	√
(Sh)	√	√	√	x
(T)	√	√	√	√

În lucrarea de faţă se face o analiză a comportamentului dinamic al grinzilor de lungimi diferite, dar cu păstrarea constantă a secţiunii, pentru grinda încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, folosind modelul Euler-Bernoulli respectiv metoda elementelor finite (FEM).

2. Calculul frecvenţelor proprii folosind modelul Euler-Bernoulli

La studiul acestui model se porneşte de la ecuaţia de mişcare:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho \cdot A}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

prezentată în [2] şi [3], în care v este deplasarea verticală, E modulul de elasticitate longitudinal, este A este aria secţiunii, I este momentul de inerţie şi ρ este densitatea.

Considerăm mişcarea de tip armonic. În acest caz putem scrie:

$$v(x,t) = \phi(x) \cdot y(t) = \phi(x) \cdot sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

unde x şi t sunt variabilele corespunzătoare deplasării, respectiv a timpului.

Derivata de ordinul 1 relaţiei (2) este:

$$v'_x = \frac{\partial v}{\partial x} = sin(\omega t + \varphi) \cdot \phi'(x) \tag{3}$$

derivata a 2-a şi a 3-a sunt:

$$v''_{x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = sin(\omega t + \varphi) \cdot \phi''(x) \tag{4}$$

$$v'''_{x^3} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = sin(\omega t + \varphi) \cdot \phi'''(x) \tag{5}$$

iar derivata de ordinul 4 este:

$$v''''_{x^4} = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = sin(\omega t + \varphi) \cdot \phi''''(x) \tag{6}$$

Derivând în raport cu timpul:

$$v'_t = \frac{\partial v}{\partial x} = \phi(x) \cdot [sin(\omega t + \varphi)]'_t \tag{7}$$

se ajunge la derivata de ordinul 1 în funcţie de timp, de forma:

$$v'_t = \phi(x) \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

Derivând încă o dată, se obţine derivata de ordinul 2 în raport cu timpul, de forma:

$$v''_t = -\phi(x) \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega t + \varphi) \tag{9}$$

Înlocuind în relaţia (9), iar apoi împărţind ecuaţia la *sin (ωt+φ)*, se obţine:

$$\phi''''(x) - \frac{\rho \cdot A}{E \cdot I} \cdot \omega^2 \cdot \phi(x) = 0 \tag{10}$$

Se notează:

$$\frac{\rho \cdot A}{E \cdot I} \cdot \omega^2 = \alpha^4 \tag{11}$$

şi

$$\alpha \cdot L = \lambda \tag{12}$$

Înlocuind relaţia (11) în relaţia (10), vom avea:

$$\phi''''(x) - \alpha^4 \cdot \phi(x) = 0 \tag{13}$$

Soluţia ecuaţiei (13) este de forma:

$$\phi(x) = A \cdot sin(\alpha x) + B \cdot cos(\alpha x) + C \cdot sinh(\alpha x) + D \cdot cosh(\alpha x) \tag{14}$$

Soluţia relaţiei (1) este în acest caz de forma:

$$\phi(x) = cosh(\alpha x) - cos(\alpha x) - \frac{cos(\alpha L) + cosh(\alpha L)}{sin(\alpha L) + sinh(\alpha L)} \cdot \left[sinh(\alpha x) - sin(\alpha x)\right] \quad (15)$$

Obţinem ecuaţia caracteristică pentru grinda încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, deci:

$$1 + cos\,\lambda \cdot cosh\,\lambda = 0 \quad (16)$$

Punând condiţiile la margine, derivând relaţia (14), rezolvând sistemul cu coeficienţii A,B,C şi D,

$$\begin{cases} \phi(0) = \left[A \cdot sin(\alpha 0) + B \cdot cos(\alpha 0) + C \cdot sinh(\alpha 0) + D \cdot cosh(\alpha 0)\right] = 0 \\ \phi'(0) = \alpha\left[A \cdot cos(\alpha 0) - B \cdot sin(\alpha 0) + C \cdot cosh(\alpha 0) + D \cdot sinh(\alpha 0)\right] = 0 \\ \phi''(L) = \alpha^2\left[-A \cdot sin(\alpha L) - B \cdot cos(\alpha L) + C \cdot sinh(\alpha L) + D \cdot cosh(\alpha L)\right] = 0 \\ \phi'''(L) = \alpha^3\left[-A \cdot cos(\alpha L) + B \cdot sin(\alpha L) + C \cdot cosh(\alpha L) + D \cdot sinh(\alpha L)\right] = 0 \end{cases} \quad (17)$$

din relaţia (12) rezultă:

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 \cdot E \cdot I}{\rho \cdot A} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha^4 \cdot E \cdot I}{\rho \cdot A}} = \alpha^2 \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} \Rightarrow \omega = \frac{\lambda^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} \quad (18)$$

ştiind că:

$$\omega_i = 2\pi \cdot f_i \quad (19)$$

se obţin frecvenţele proprii de forma următoare:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} \quad (20)$$

3. Rezultate

Proprietăţile fizice şi mecanice ale grinzilor analizate sunt prezentate în tabelul 2, în timp ce secţiunea geometrică şi caracteristicile geometrice sunt prezentate în tabelul 3.

Tabelul 2

Proprietăţi	U.M.	Valoare
Densitatea	kg/m^3	7850
Modulul de elasticitate longitudinal	N/m^2	2,0 × 10^{11}
Coeficientul lui Poisson	-	0,3

Tabelul 3

Înălţimea H [m]	Lăţimea B [m]	Aria secţiunii A [m^2]	Momentul de inerţie I [m^4]
0,012	0,012	$1,44\times10^{-4}$	$1,728\times10^{-9}$

În această lucrare, pentru grinda încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, cu secţiune de 12x12 mm, cu lungime de 1400, respectiv 200 mm şi cu elementul mediu folosit pentru discretizare, de 2 mm, în urma calculelor s-au obţinut valorile frecvenţelor pentru primele opt moduri.

În lucrare se prezintă frecvenţele pentru grinzile de lungime 200 mm (tabelul 4), respectiv 1400 mm (tabelul 5), astfel:

Tabelul 4

Modul i	λ_1	frecvenţa [Hz]
1	1,875104	244,6142
2	4,694091	1532,9710
3	7,854757	4292,3634
4	10,995540	8411,3192
5	14,137168	13904,5133
6	17,278759	20770,9353
7	20,420352	29010,6454
8	23,561944	38623,6403

Tabelul 5

Modul i	λ_7	frecvenţa [Hz]
1	1,875104	4,9921
2	4,694091	31,2851
3	7,854757	87,5992
4	10,995540	171,6595
5	14,137168	283,7655
6	17,278759	423,8966
7	20,420352	592,0539
8	23,561944	788,2375

Metoda elementelor finite constituie o metodă actuală de analiză şi simulare a fenomenelor reale.

Această metodă permite vizualizarea spaţială a comportării unei piese pe baza unor criterii impuse, fiind o metodă generală de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale care descriu sau nu fenomene fizice.

Principiul constă în descompunerea domeniului de analiză în porţiuni de formă geometrică simplă, analiza acestora şi recompunerea domeniului respectând anumite cerinţe matematice.

Bazele analizei cu elemente finite au fost pentru prima dată formulate în 1943 de către matematicianul german Richard Courant (1888-1972), care, îmbinând metoda Ritz cu analiza numerică în probleme de calcul variaţional şi minimizare, a obţinut soluţii satisfăcătoare pentru analiza sistemelor cu vibraţii.

De aproape 40 de ani, metoda elementelor finite a început să fie folosită la rezolvarea unor probleme mai complexe din domeniul structurilor elastice continue, de la construcţiile civile, industriale sau de baraje, până la construcţiile de nave maritime.

În tabelul 6 este prezentat numărul de noduri şi numărul elementelor grinzilor, corespunzător elementului mediu folosit pentru discretizare de 2 mm, rezultate obţinute cu programul Ansys.

Tabelul 6

Tipul grinzii			
200		1400	
noduri	elemente	noduri	elemente
18333	3600	127533	25200

Rezultatele *erorilor relative* a frecvenţelor proprii, cazul Euler-Bernoulli, sunt prezentate în tabelul 7, iar în figura 1 se prezintă grafic aceste erori.

S-a calculat eroarea relativă a frecvenţelor proprii pentru modelul Euler-Bernoulli, astfel:

$$\Delta f_i^{EB} = \frac{f_i^{FEM} - f_i^{EB}}{f_i^{FEM}} \cdot 100 \ \ [\%] \tag{22}$$

Se confirmă faptul că modelul Euler-Bernoulli redă cu fidelitate frecvenţele pentru lungimi mari ale barei.

Tabelul 7

Modul *i*	Lungime [mm]						
	200	400	600	800	1000	1200	1400
1	0,0359	0,0359	0,0359	0,03590	0,0359	0,0359	0,0359
2	0,0018	-0,0531	-0,1333	-0,2372	-0,3649	-0,5161	-0,6906
3	-0,0056	-0,0805	-0,1895	-0,3308	-0,5041	-0,7094	-0,9461
4	-0,0198	-0,1276	-0,2844	-0,4874	-0,7362	-1,0304	-1,3692
5	-0,0493	-0,2175	-0,4620	-0,7779	-1,1645	-1,6202	-2,1437
6	-0,1202	-0,4185	-0,8512	-1,4081	-2,0867	-2,8828	-3,7920
7	-0,3432	-1,0100	-1,9704	-3,1950	-4,6704	-6,3796	-8,3047
8	-1,6510	-4,2267	-7,8196	-12,2184	-17,2940	-22,9240	-29,007

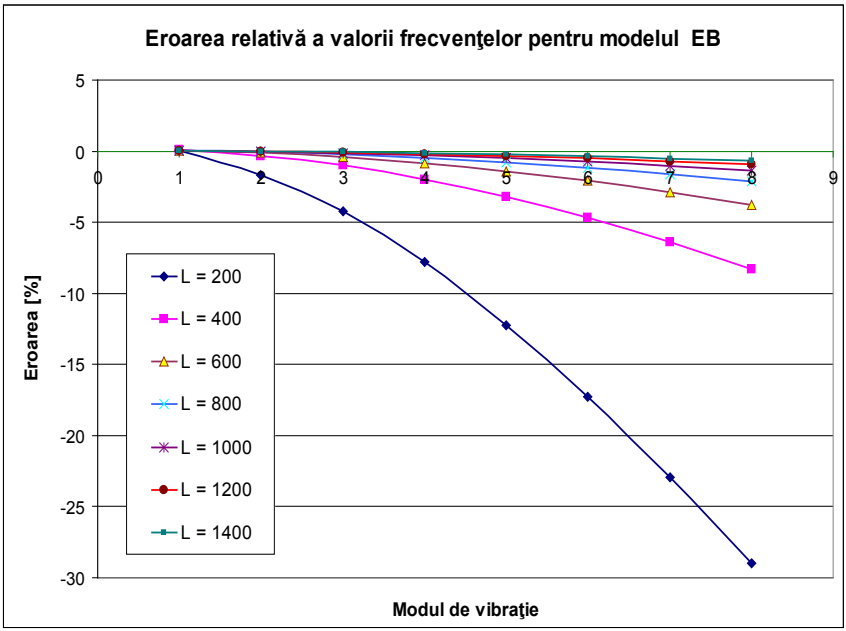

Fig. 1 Eroarea relativă a valorii frecvenţelor proprii, raportând frecvenţele obţinute cu modelul Euler-Bernoulli la cele determinate numeric

4. Concluzii

Se observă că pentru lungimi mari, precizia este bună, pe când pentru lungimi mici eroarea creşte semnificativ, mai ales la modurile mari de vibraţie (exemplu la grinda de lungime L = 200 mm abaterea la modul 8 este de aproape 30 %).

Mulţumiri

Autorii mulţumesc pentru sprijinul acordat de Fondul Social European Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane, prin Ministerul Muncii, Familiei şi Protecţiei Sociale prin co-finanţarea proiectului (DocInvest) POSDRU/107/1.5/S/76813.

BIBLIOGRAFIE

[1] Han, S.M., Bernaroya, H., Wei, T., *Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories,* Journal of Sound and Vibration, 1999.
[2] Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B., Shevitz, D.W., *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review*, Reprot No. LA 13070-MS, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, 1996.
[3] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Iavornic, C.M., *Reliable method to detect and assess damages in beams based on frequency changes*, Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2012, August 12-15, 2012, Chicago, Illinois, USA.
[4] Morassi, A., Vestroni, F., *Dynamic Methods for Damage Detection in Structures*, CISM Courses and Lectures, Vol. 499, Springer Wien New York, 2008.
[5] Mindlin, R.D., Deresiewicz, H., *Proceedings of 2nd U.S. National Congress of Applied Mechanics,* New York: ASME, 1954, pag. 175-178.

Drd.Ing. Carla PROTOCSIL,
Universitatea „Eftimie Murgu” Reşiţa, membru AGIR
e-mail: c.protocsil@uem.ro

Prof.Univ.Dr.Ing.Ec. Gilbert-Rainer GILLICH,
Prorector Cercetare
Universitatea „Eftimie Murgu” Reşiţa,
Preşedinte AGIR sucursala Caraş-Severin
e-mail: gr.gillich@uem.ro