



A XII-a Conferință Națională multidisciplinară – cu participare internațională.  
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii românești",  
SEBEȘ, 2012

## **METODĂ ANALITICĂ PENTRU STUDIUL PUNȚII DE DIODE AVÂND O SARCINĂ COMPLEXĂ**

Vasile Mircea POPA

### **ANALYTICAL METHOD FOR THE STUDY OF THE DIODE-BRIDGE WITH A COMPLEX LOAD**

Commonly, three-phase diode bridge rectifiers are often used to convert AC input into a DC voltage. It is well known that they generate large amounts of harmonic currents in DC and AC sides. The paper proposes an analytical method for calculating the harmonic currents of a three-phase diode-bridge under non-symmetrical supply conditions and with a complex load. We are considering a three-phase ideal diode-bridge fed by a non-symmetrical voltage system:  $e_a(x) = E_a \sin(x-x_1)$ ,  $e_b(x) = E_b \sin(x-x_2)$  and  $e_c(x) = E_c \sin(x-x_3)$ . Performing those calculations we obtain the Fourier coefficients of serial development for the harmonic currents on both the DC and AC sides. The equations for the harmonic currents are derived, taking into account the effects of the DC and AC side impedances. All the calculations are conducted only by algebraic calculation with high accuracy. The proposed method can be easily extended to the harmonic analysis of three-phase thyristor-bridge with non-symmetrical supply conditions and a complex load.

Cuvinte cheie: punte de diode, alimentare nesimetrică, sarcină complexă, analiză armonică

Keywords: bridge diode, symmetrical power, complex task, harmonic analysis

#### **1. Introducere**

În cele ce urmează se va studia puntea de diode alimentând o sarcină formată dintr-o rezistență  $R_d$ , o reactanță inductivă  $X_d$  și o sursă

de tensiune contraelectromotoare  $E_d$ . Sursa de tensiune alternativă trifazată posedă în cele trei faze reactanțele  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ . Sistemul de tensiuni electromotoare ( $e_a$ ,  $e_b$ ,  $e_c$ ) este în general nesimetric.

Se vor deduce formele de undă ale mărimilor care intervin la funcționarea punții și se vor calcula armonicile acestor mărimi.

Se va prezenta o metodă analitică obținută prin adaptarea și dezvoltarea unor procedee de calcul din literatura tehnică de specialitate [1], [3], [4], [9], [13].

## 2. Metoda analitică

Metoda analitică dezvoltată în continuare permite calculul armonicilor de curent pentru o punte trifazată de diode sub condiții de dezechilibru a sursei de alimentare. Expresiile analitice pentru armonicile de curent sunt obținute luând în considerare efectele unde de curent continuu și a unghiului de comutație. În literatura de specialitate există lucrări care tratează această problemă, dar în diferite ipoteze de lucru [1].

Astfel, în unele lucrări impedanța pentru partea de curent continuu este considerată infinită, deci curentul continuu este considerat perfect constant (fără efect de undă, deci fără ondulații). În alte lucrări se neglijează reactanța de comutație (deci unghiul de comutație) sau se consideră puntea ca o sursă de tensiune ideală (impedanța părții de curent alternativ este cu mult mai mică decât impedanța părții de curent continuu).

În metoda analitică prezentată în continuare se iau în considerare efectele unde de curent continuu și ale unghiului de comutație. Impedanța părții de curent alternativ nu este necesar să fie mai mică decât impedanța părții de curent continuu. Ele pot fi comparabile în mărime.

Metoda este foarte precisă, rezultatele obținute fiind foarte apropiate față de acelea obținute prin metoda simulării pe calculator [1], [3], [13].

## 3. Expresiile generale pentru armonicile de curent

În figura 1 este reprezentată puntea trifazată analizată.

Curentul  $i_d$  al părții de curent continuu constă în componenta  $I_d$  și în componenta alternativă  $i_{dr}$ . Expresia generală pentru acest curent va fi deci:

$$i_d = I_d + i_{dr} = I_d + \sum_m i_{dm} = I_d + \sum_m \sqrt{2} I_{dm} \cos(mx - \beta_m) \quad (1)$$

unde:  $m$  = ordinul armonicii;  $I_{dm}$  = valoarea efectivă a armonicii  $m$ ;  $\beta_m$  = faza inițială pentru armonica  $m$ .

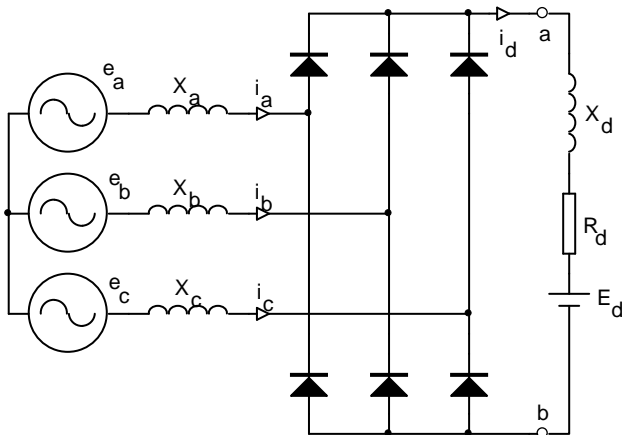


Fig. 1 Punte de diode alimentată nesimetric, cu o sarcină complexă

Curentul de linie de c.a. poate fi analizat pe o cale asemănătoare. Mai precis, curentul de linie  $i_a$  (din faza a) constă din curentul  $i_{oa}$  care este produs de curentul neted de c.c. egal cu valoarea medie  $I_d$  și din curentul  $\Delta i_a$  care este determinat în zona de c.a. de către componenta  $i_{dr}$  injectată în circuitul de redresare.

Deci, el are expresia:

$$i_a = i_{oa} + \Delta i_a \quad (2)$$

Similar, ecuațiile pentru curenții de linie de c.a. pentru celelalte două faze pot fi scrise în felul următor:

$$i_b = i_{ob} + \Delta i_b \quad (3)$$

$$i_c = i_{oc} + \Delta i_c \quad (4)$$

Calcularea curenților pentru zonele de c.c. și de c.a. este prezentată în continuare. Pentru detalii se poate vedea [3] și [13].

#### 4. Calcularea armonicilor de curent pentru partea de curent continuu

În lucrările [3] și [13] se prezintă tensiunea de circuit deschis (t.e.m.)  $e_{dm}$ , egală cu armonica componentă a tensiunii de ieșire de c.c. pentru cazul mărimii infinite a reactanței de netezire, adică având

curent continuu perfect neted. În acest caz, tensiunea  $e_d$  din zona de c.c. se poate exprima cu ajutorul funcțiilor de comutație ale redresării  $S_a, S_b, S_c$ , arătate în figura 2.

Avem:

$$e_d = S_a e_a + S_b e_b + S_c e_c \quad (5)$$

unde  $e_a, e_b, e_c$  sunt tensiunile electromotoare de pe cele trei faze dezechilibrate, date de relațiile:

$$e_a = E_a \sin(x - x_1) \quad (6)$$

$$e_b = E_b \sin(x - x_2) \quad (7)$$

$$e_c = E_c \sin(x - x_3) \quad (8)$$

Fiecare funcție de comutație a redresării poate fi exprimată cu seriile Fourier următoare:

$$S_a = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{an} \cos nx + B_{an} \sin nx \quad (9)$$

$$S_b = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{bn} \cos nx + B_{bn} \sin nx \quad (10)$$

$$S_c = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{cn} \cos nx + B_{cn} \sin nx \quad (11)$$

unde:

$$A_{an} = -\frac{2}{n\pi} \left[ \sin n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} - \sin n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} \right] \quad (12)$$

$$B_{an} = \frac{2}{n\pi} \left[ \cos n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} - \cos n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} \right] \quad (13)$$

$$A_{bn} = -\frac{2}{n\pi} \left[ \sin n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} - \sin n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} \right] \quad (14)$$

$$B_{bn} = \frac{2}{n\pi} \left[ \cos n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} - \cos n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} \right] \quad (15)$$

$$A_{cn} = -\frac{2}{n\pi} \left[ \sin n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} - \sin n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} \right] \quad (16)$$

$$B_{cn} = \frac{2}{n\pi} \left[ \cos n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} - \cos n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} \right] \quad (17)$$

În aceste relații avem:

$$n = 2k - 1; k = 1, 2, 3, \dots$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 =$  unghiurile de aprindere ale fazelor respective de la punctul zero  $x = 0$ , arătate în figura 2.

$u_1, u_2, u_3 =$  unghiurile de comutație ale fazelor respective, arătate în fig.2.

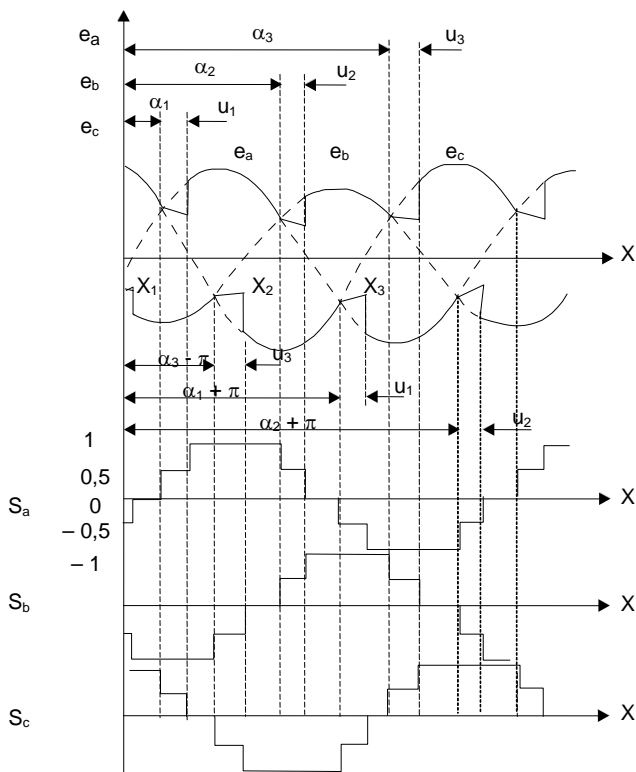


Fig. 2 Sistemul nesimetric de alimentare și funcțiile de comutație ale redresării

Sub condiții de dezechilibru (nesimetrie) ale sursei, unghiurile de comutație  $u_1, u_2, u_3$  în fazele a, b, c sunt date de relațiile:

$$u_1 = \arccos \left[ 1 - \frac{(X_c + X_a) I_d}{\sqrt{E_c^2 + E_a^2 - 2E_c E_a \cos(x_3 - x_1)}} \right] \quad (18)$$

$$u_2 = \arccos \left[ 1 - \frac{(X_a + X_b)I_d}{\sqrt{E_a^2 + E_b^2 - 2E_aE_b \cos(x_1 - x_2)}} \right] \quad (19)$$

$$u_3 = \arccos \left[ 1 - \frac{(X_b + X_c)I_d}{\sqrt{E_b^2 + E_c^2 - 2E_bE_c \cos(x_2 - x_3)}} \right] \quad (20)$$

unde:

$$\alpha_1 = \arctg \frac{-E_c \sin x_3 + E_a \sin x_1}{-E_c \cos x_3 + E_a \cos x_1} \quad (21)$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{-E_a \sin x_1 + E_b \sin x_2}{-E_a \cos x_1 + E_b \cos x_2} \quad (22)$$

$$\alpha_3 = \arctg \frac{-E_b \sin x_2 + E_c \sin x_3}{-E_b \cos x_2 + E_c \cos x_3} \quad (23)$$

## 5. Calcularea armonicilor de curent pentru partea de curent alternativ

Vom analiza curenții  $i_{oa}$ ,  $i_{ob}$ ,  $i_{oc}$ .

După cum rezultă din paragraful 3, curenții de linie din zona de c.a.  $i_{oa}$ ,  $i_{ob}$ ,  $i_{oc}$  sunt produși de curentul constant  $I_d$  din partea de c.c. Deci, după ecuațiile 18 ... 23 curentul alternativ  $i_{oa}$  în faza a arătat în figura 3 este reprezentat de o formă simetrică de undă descrisă de:

$$(a) \alpha_1 \leq x < \alpha_1 + u_1$$

$$i_{oa} = \frac{1 - \cos(x - \alpha_1)}{1 - \cos u_1} \cdot I_d \quad (24)$$

$$(b) \alpha_1 + u_1 \leq x < \alpha_2$$

$$i_{oa} = I_d \quad (25)$$

$$(c) \alpha_2 \leq x < \alpha_2 + u_2$$

$$i_{oa} = \left[ 1 - \frac{1 - \cos(x - \alpha_2)}{1 - \cos u_2} \right] I_d \quad (26)$$

$$(d) \alpha_2 + u_2 \leq x < \alpha_1 + \pi$$

$$i_{oa} = 0 \quad (27)$$

De aici, seria Fourier a curentului  $i_{oa}$  este exprimată prin următoarea relație:

$$i_{oa} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{oan} \cos nx + B_{oan} \sin nx) \quad (28)$$

unde  $A_{oan}$  și  $B_{oan}$  sunt dați în lucrările [3] și [13].

Expresiile lui  $i_{ob}$  și  $i_{oc}$  pentru fazele b și c pot fi obținute schimbând notațiile în ecuația (28) în felul următor:

Faza b:

b în loc de a  
a în loc de c  
2 în loc de 1  
1 în loc de 3

Faza c:

c în loc de a  
b în loc de c  
3 în loc de 1  
2 în loc de 3

Formele de undă ale curenților de linie pe partea de curent alternativ sunt redată în figura 3.

Analizând figurile 3 b la 3 d se poate concluziona că curențul  $\Delta i_a$  care este determinat în faza a de componenta de c.a.  $i_{dr}$  a părții de c.c., poate fi obținut prin multiplicarea curențului  $i_{dr}$  cu funcția de comutație a redresării  $S_a$ .

$$\Delta i_a = S_a i_{dr} \quad (29)$$

$$\Delta i_a = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \Delta A_{an} \cos nx + \Delta B_{an} \sin nx \quad (30)$$

unde:

$$\Delta A_{an} = \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} I_{dm} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (A_{a(n-m)} + A_{a(n+m)}) \cdot \cos \beta_m - (B_{a(n-m)} + B_{a(n+m)}) \cdot \sin \beta_m \right] \quad (31)$$

$$\Delta B_{an} = \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} I_{dm} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (A_{a(n-m)} + A_{a(n+m)}) \cdot \cos \beta_m - (B_{a(n-m)} + B_{a(n+m)}) \cdot \sin \beta_m \right] \quad (32)$$

$n = 2k - 1$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$

$m = 2k$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$

Aici trebuie notat:

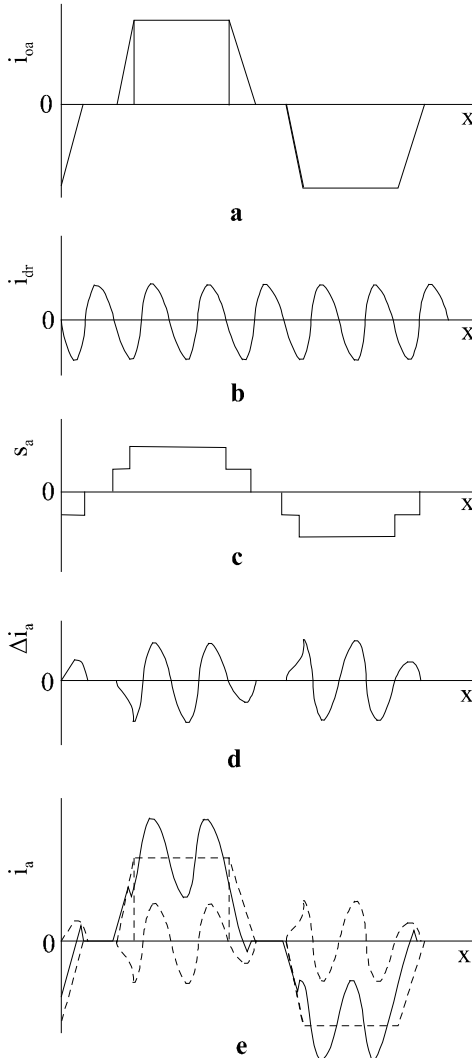


Fig. 3 Formele de undă ale curenților alternativi

$$A_{a(n-m)} = A_{a(m-n)} \text{ și } (33)$$

$$B_{a(n-m)} = -B_{a(m-n)} \quad (34)$$

pentru  $n - m < 0$ .

Prin urmare curentul de linie  $i_a$  arătat în figura 3 este dedus din ecuațiile 2, 28, și 30 după cum urmează:



$$i_a = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} [(A_{oan} + \Delta A_{an}) \cos nx + (B_{oan} + \Delta B_{an}) \sin nx] \quad (35)$$

$$i_a = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} [A_{ian} \cos nx + B_{ian} \sin nx] \quad (36)$$

Valoarea efectivă  $I_{an}$  a armonicii  $n$  a lui  $i_a$  este:

$$I_{an} = \frac{\sqrt{A_{ian}^2 + B_{ian}^2}}{2}$$

Expresiile pentru  $i_b$  și  $i_c$  rezultă ușor prin reamplasarea indicilor după cum s-a arătat mai înainte.

## 6. Concluzii

- În această lucrare se prezintă o metodă analitică pentru studiul punții de diode alimentate nesimetric și avînd o sarcină complexă. Se calculează curenții pentru partea de curent continuu și pentru partea de curent alternativ.

- Calculele au o mare acuratețe, iar rezultatele finale obținute au fost verificate prin comparație cu cele provenind din modelarea pe calculator (PSPICE). Eroarea relativă maximă nu depășește 1,1% pentru partea de curent continuu și respectiv 2,6 % pentru partea de curent alternativ.

- Metoda reprezintă adaptarea unui procedeu de calcul analitic preluat din literatura de specialitate [1] și care se referă la o punte trifazată comandată, cu tiristoare.

- Pentru detalii ale metodei analitice prezentate în acest articol se pot vedea lucrările [3] și [13] din lista bibliografică.

## BIBLIOGRAFIE

[1] Sakui, M., Fujita, H., *Calculation of harmonic currents in a three-phase convertor with unbalanced power supply conditions*; IEE Proceedings-B, Vol.139, No.5, September 1992, pag.478-484.

[2] Popa, V. M., Buduriși, C., Garcia, Moreno, E., *Some Aspects about the Analysis of a Three-Phase Non-Symmetrical Alimentated Bridge with Thyristors*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.42-44.

[3] Popa, V. M., *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, 1999.

- [4] Popa, V. M., Roșca, P., *Metodă analitică pentru studiul punții de diode alimentată nesimetric*, A doua Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice, Chișinău, 8-9 octombrie 1999, Volumul I, pag. 225-228.
- [5] Popa, V. M., Roșca, P., *Program de calculator pentru studiul punții de diode alimentată nesimetric*, A doua Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice, Chișinău, 8-9 octombrie 1999, Volumul I, pag. 229-230.
- [6] Popa, V. M., Popescu, L., *Studiul punții de diode alimentată cu sisteme particulare nesimetrice de tensiuni*, A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice și Energetice SIELMEN - 2001, Chișinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9.
- [7] Popa, V. M., Popescu, L., *Măsurători experimentale privind puntea de diode alimentată nesimetric*, A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice și Energetice SIELMEN - 2001, Chișinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9.
- [8] Popa, V. M., *Studiul punții de diode alimentată nesimetric*, În: „Știință și Inginerie”, vol. 3, Editura AGIR, București, 2003, ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8466-03-2.
- [9] Popa, V. M., *Studiul analitic al punții trifazate de diode alimentate nesimetric*, A VI-a Sesiune de comunicări științifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 4 noiembrie 2005, Extras, ISBN 973-7998-23-5.
- [10] Popa, V. M., *Analiza punții de diode alimentată cu sisteme de tensiuni nesimetrice*, În: „Știință și Inginerie”, vol.9, Editura AGIR, București, 2006, ISBN 10 973-8130-82-4.
- [11] Popa, V. M., *Aspecte experimentale și sintetice privind puntea trifazată de diode alimentată nesimetric*, A VII-a Sesiune de comunicări științifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 19 aprilie 2007, Extras, ISBN 978-973-7998-32-3.
- [12] Popa, V. M., *Rezultate experimentale și comparative privind puntea de diode în regim de alimentare nesimetric*, În: „Știință și Inginerie”, vol. 11, Editura AGIR, București, 2007, ISBN 973-8130-82-4.
- [13] Popa, V. M., *Sisteme nesimetrice în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2011, ISBN 978-606-12-0253-9, monografie tehnică, 150 pag.

Prof.Dr.Ing. Vasile Mircea POPA,  
Universitatea „Lucian Blaga” din Sibiu,  
Facultatea de Inginerie “Hermann Oberth”  
Sibiu, str. Emil Cioran nr. 4, cod poștal: 550025  
e-mail: popavm@yahoo.com  
membru AGIR