A XIII-a Conferinţă Naţională multidisciplinară – cu participare internaţională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2013

ASPECTE PRIVIND MODELAREA TRANSFERULUI DE LICHID LA FILTRAREA APEI PRINTR-UN FILTRU DE NISIP

Tiberiu RUSU, Tudor Andrei RUSU

ISSUES REGARDING THE TRANSFER OF MODELLING LIQUID TO WATER FILTRATION THROUGH A SAND FILTER

This paper brings study of hydrodynamic filtration laws and their mathematical equations. Hydrological problems are formulated according deterministic and stochastic methods. Modelling principles are presented for solving specific hydrological issues.

Cuvinte cheie: legea lui Darcy, starea de echilibru, flux saturat, flux tranzitoriu saturat, principii de modelare
Keywords: Darcy's law, steady-state saturated flow, transient saturated flow, modelling principles

1. Aspecte generale

Procesul de filtrare a lichidelor în medii saturate poroase, cum este de exemplu filtrarea apei în cadrul procesului de potabilizare, a fost studiată de-a lungul ultimelor două secole şi continuă să preocupe mulţi cercetători. Fenomenul de curgere a apei, soluţiilor prin filtrul de nisip şi roci are un rol esenţial în potabilizarea apelor şi de asemenea în problema poluării apelor subterane etc.

În general zona numită zona saturată a filtrului sau a solului se găseşte în zona umedă, fie că este filtru, fie că este pânza freatică, unde are loc filtrarea.

Legile hidrodinamice ale filtrării sunt instrumentul principal care fac legătura dintre forţele şi factorii de apariţie a fluxului de lichid.

Procesul de realizare a unui model al fluxului de lichid se poate realiza prin metode deterministe sau stocastice.

În primul caz variaţia parametrilor respectă legile bine stabilite ale curgerii prin materiale poroase, iar în cel de-al doilea procesele se referă la un comportament aleatoriu.

2. Bazele hidrodinamice ale filtrării

Porii şi fisurile au o configuraţie spaţială diferită, suprafaţa activă se măreşte cu gradul de dispersie. Forţele moleculare între apă şi scheletul mineral sunt forţe de frecare internă. În porii şi fisurile mari acţiunea forțelor moleculare este nesemnificativă, dar creşte cu reducerea dimensiunii acestora.

În condiţiile hidratării complete a stratului filtrant există o fază continuă care transmite variaţiile presiunii hidrostatice şi geostatice. La curgerea laminară se respectă proporţionalitatea între forţa internă totală de frecare şi variaţia energiei potenţiale, adică a gradientului hidraulic.

Configuraţia porilor şi fisurilor în mediu natural nu se poate descrie matematic. Deplasarea lichidelor în medii poroase este cercetată pe baza mecanicii mediilor continui. Fiecare tip de mediu geologic se delimitează printr-un volum reprezentativ pentru care nu se ia în considerare structura reală a spaţiului poros, dar se analizează parametri generalizaţi cum ar fi porozitatea, permeabilitatea, vâscozitatea etc.

Descrierea matematică a filtrării a fost realizată de inginerul Henry Darcy pe baza observaţiilor făcute asupra curgerii apei într-o coloană cu nisip, care este utilizat ca mediu filtrant.

Legea care îi poartă numele reprezintă legătura dintre debit şi pierderile liniare ale presiunii, caracterizate prin consumul energiei necesar învingerii forţelor de frecare a mediului.

Viteza de filtrare este parametrul cinematic folosit pentru exprimarea legii lui Darcy:

$$v = \frac{Q}{A} = k \cdot i = k \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} \qquad (1)$$

în care:

Q - debitul lichidului, [m^3/s];

A - aria secţiunii transversale, [m^2];

k - coeficientul de filtrare sau conductivitatea hidraulică în mediu saturat, [m/s];

i - gradientul hidraulic, [-].

Δh - sarcina hidraulică, [m];

Δl - lungimea coloanei de lichid, [m].

Conductivitatea hidraulică, denumită de asemenea viteza de filtrare la gradient hidraulic unitar, are unitatea de măsură a vitezei. Ea depinde de structura mediului filtrant şi proprietăţile lichidului.

Sarcina hidraulică pentru o coloană verticală de sol, deasupra căreia lipseşte stratul de lichid, este egală cu distanţa parcursă de curent între limita superioară şi inferioară a coloanei. Astfel gradientul hidraulic devine unitar, iar conductivitatea hidraulică este egală cu viteza de filtrare [1].

Relaţiile matematice a legii lui Darcy sunt pur teoretice de aceea nu se aplică mediilor reale.

S-au obţinut soluţii numai pentru curgerea lichidelor în mediu fictiv, format dintr-un fascicul de tuburi capilare paralele cu acelaşi diametru şi în mediu ideal, reprezentat printr-un material din particule sferice de rază egală.

Legea lui Darcy este valabilă în limite destul de mari. Limita superioară a legii lui Darcy se manifestă la curgerea apei prin rocile carstice cu un sistem complex de fisuri şi goluri deschise. Limita inferioară apare la mişcarea lichidelor în medii fin dispersate, argile. La viteze mari de filtrare intervin forţele de inerţie, iar în mediile disperse apar forţele moleculare de frecare internă [6].

Ecuaţia lui Darcy sub formă diferenţială pentru sistemul cartezian de coordonate caracterizează curgerea unui curent în mediu eterogen, anizotrop:

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}; \quad v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}; \quad v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}; \qquad (2)$$

Direcţia vitezei de filtrare depinde de vectorul gradientul hidraulic, iar conductivitatea hidraulică reprezintă un tensor aplicat de regulă ca scalar.

Ecuaţia de curgere staţionară a apei freatice se deduce din legea lui Darcy şi din legea de conservare a masei. Intensitatea şi direcţia vitezei sunt constante în timp la curgerea staţionară.

În cazul unui curent nestaţionar direcţia şi intensitatea vectorului vitezei în fiecare punct se schimbă în timp sau variază

condiţiile potenţiometrice în dependenţă de alimentarea sau descărcarea corpului hidrologic.

În figura 1 este prezentat un volum elementar de sol prin care are loc deplasarea unui curent de lichid. Legea de conservare a masei pentru curgerea staţionară presupune ca masa fluidului intrată în acest volum să fie egală cu masa ieşită, prin urmare creşterea masei de fluid în volum pe direcţiile axelor *x, y* şi *z* să fie nulă.

Ecuaţia de conservare a masei pentru volumul elementar este:

$$([\{\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\} - \rho v_x]\Delta y\Delta z) + ([\{\rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\Delta y\} - \\ - \rho v_y]\Delta x\Delta z) + ([\{\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\Delta z\} - \rho v_z]\Delta x\Delta y) = 0 \quad (3)$$

Pentru fluide incompresibile cu densitatea constantă $\rho(x, y, z)$ ecuaţia (3) devine:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Din relaţiile (2) şi (4) se obţine ecuaţia de curgere a apelor subterane pentru medii poroase:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0 \quad (5)$$

Pentru medii izotrope şi omogene, $k_x = k_y = k_z$, respectiv $k(x, y, z) =$ constant, ecuaţia (5) devine:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

Expresia matematică pentru curgerea staţionară a lichidelor din pânza freatică este ecuaţia Laplace, iar soluţiile ei $h(x, y, z)$ descriu valorile sarcinii hidraulice în fiecare punct al spaţiului tridimensional de curgere. Rezolvarea ecuaţiei (5) permite trasarea liniilor echipotenţiale, iar adăugând liniile de curent se va obţine harta regimului apei subterane.

Ecuaţia de curgere nestaţionară în condiţii saturate se bazează de asemenea pe legea conservării masei care susţine că masa de fluid

intrată în volumul elementar este egal cu variaţia în timp a cantităţii de lichid înmagazinate în acel volum.

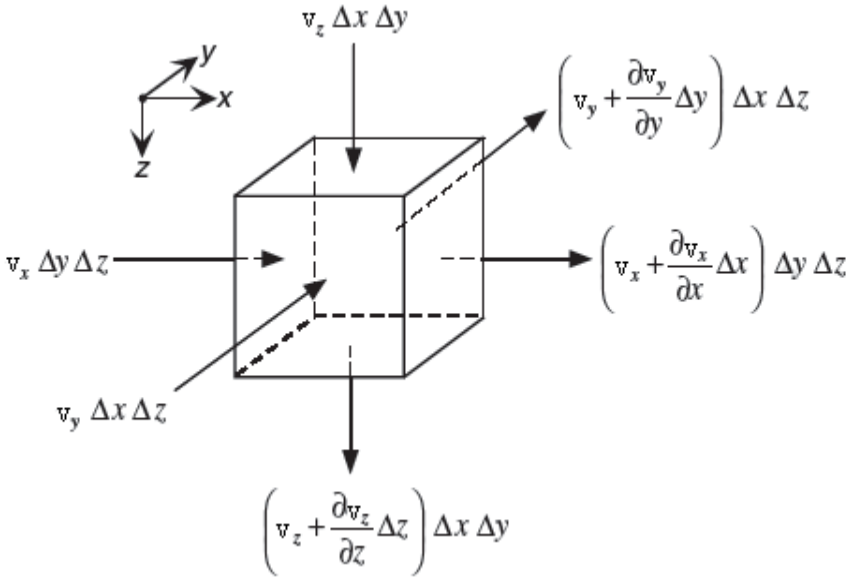

Fig. 1 Volumul elementar de sol reprezentativ pentru curgere [10]

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=\frac{\partial(\rho n)}{\partial t}=n\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial n}{\partial t} \qquad (7)$$

Primul termen din partea dreapta a expresiei (7) descrie variaţia masei produsă de extinderea apei sub influenţa densităţii ρ, iar cel de-al doilea se referă la compactarea materialului poros datorită porozităţii n. Schimbul densităţii fluidului şi porozităţii materialului sunt cauza variaţiilor sarcinii hidraulice.

Ecuaţia nestaţionară de curgere este:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\frac{\rho g(\alpha+n\beta)}{k}\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (8)$$

în care:

α - factorul de compresibilitate a acviferului, [m^2/N];

β - factorul de compresibilitate a fluidului, [m^2/N];

k - conductivitatea hidraulică în mediu saturat, [m/s].

Pentru un mediu saturat omogen, izotrop ecuaţia nestaţionară de curgere este:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\frac{\rho g(\alpha+n\beta)}{k}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{9}$$

Rezolvarea ecuaţiei (8) dă soluţia $h(x,y,z,t)$ care descrie sarcina hidraulică în orice punct a spaţiului pentru fiecare moment de timp.

Soluţia necesită cunoaşterea parametrilor *k, α, n, β şi ρ*.

3. Principiile modelării fluxului de lichid

Proprietăţile solurilor variază continuu sub influenţa unui complex mare de factori. Modelarea fluxului de lichid fie în zona saturată, fie în general în sol necesită un sistem de ecuaţii determinat.

Însă datorită caracterului aleatoriu a fenomenelor şi proceselor de la nivelul solului deseori se apelează la metodele statistice de rezolvare a problemelor de transfer.

La formularea unei probleme hidrodinamice sub aspectul cercetării deterministe se parcurg următoarele etape:

● se stabileşte dimensiunea zonei geometrice pe care se cercetează filtrarea;

● se introduc valorile numerice sau funcţionale ale parametrilor mediului de filtrare;

● se determină condiţiile limită şi iniţiale.

Există proleme hidrodinamice directe şi inverse. Scopul problemelor directe este determinarea cantitativă a funcţiilor dinamice de curent subteran, cunoscând valorile parametrilor de geofiltrare a mediului şi condiţiile la limită.

Problemele inverse determină parametri hidrogeologici ai stratului acvifer şi a schimbului vertical a apei, cunoscând regimul apelor subterane, funcţiile *h* şi *Q* în anumite puncte din zona cercetată pentru condiţiile iniţiale şi la limită impuse [6].

Abordarea unei probleme din punct de vederea statistic prevede identificarea unei probleme hidrogeologice şi crearea unui

model iniţia pentru aceasta; schematizarea obiectului cercetat; alegerea parametrilor de modelare; crearea matricei iniţiale de variabile dependente [2].

În calitate de metode statistice de modelare se foloseşte analiza de regresie care include modele liniare, liniare multiple şi neliniare.

Modelele cele mai reuşite, în ce priveşte comportamentul substanţelor în sol, deseori sunt o combinaţie dintre metodele stocastice şi deterministe.

Astfel se poate studia variaţia statistică a parametrilor *k, α, n, β şi ρ* care introduşi intr-un model iniţial de regresie neliniară să se folosească la determinarea regimului apelor subterane.

4. Concluzii

■ Formularea unei probleme hidrogeologice concrete de filtrare este complicată în multe situaţii, deoarece presupune cunoaşterea parametrilor mediului filtrant sau a altor informaţii preluate fie din hărţile reţelelor hidraulice, fie din măsurătorile pe teren.

■ În dependenţă de parametri cunoscuţi şi căutaţi sunt stabilite condiţiile de intrare şi la limită care vor furniza unicitatea soluţiei pe domeniu căutat.

■ Metodele statistice combinate cu cele deterministe servesc la modelarea fluxului de lichid în procesul de filtrare prin zona saturată a solului, adică pânza freatică.

BIBLIOGRAFIE

[1] Blaga, G., Filipov, F., Rusu, I., Udrescu, S., Vasile, D., *Pedologie*, Editura Academic-Pres, Cluj-Napoca, 2005.
[2] Cesalov, S., Şmaghin, B., *Statisticiskie metodî reşenia hidro-geologhiceskih zadaci la EVM*, Ed. Nedra, ISBN: 5-247-01349-2, 1989.
[3] Fanchi, J.R., *Integrated flow modeling*, Elsevier, ISBN: 0 444 50500 8, ISSN: 0376 7361, 2000.
[4] Blyth, F.G.H., Freitas, M. H. de, *A Geology for Engineers*, Elsevier Butterworth Heinemann, ISBN 0 7131 2882 8.
[5] Fred, G.B., *Environmental Geology*, by Blackwell Science Ltd, ISBN 0-86542-875-1.
[6] Gavici, I.C., *Ghidrodinamica*, Ed. Nedra, ISBN 5-247-00066-8, 1988.
[7] Hiscock, K.M., *Hydrogeology*, by Blackwell, ISBN 0-632-05763-7, 2005.

[8] Kovda, V.A., Razanov, B.G., *Pochivovedenje*. Pochiva i pochivoobrazovanje, Vol. 1, Moscova, Vîşaia Şcola, 1988.
[9] Mitchell, J.K., Kenichi, Soga., *Fundamentals of Soil Behavior*, Published by John Wiley & Sons, Inc., ISBN-13: 978-0-471-46302-7, 2005.
[10] Ning, Lu, Kikos W.J., *Unsaturated soil mechanics*, Published by John Wiley & Sons, Inc.New Jersey, ISBN:0 471 44731 5, 2004.
[11] Warrick, A.W., *Soil Water Dynamics*, Oxford University Press, ISBN 0-19-512605-X, 2003.

Prof.Dr.Ing Tiberiu RUSU
Asist.Dr.Ing Tudor Andrei RUSU
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
e-mail: andreyyro@yahoo.com