A XII-a Conferinţă Naţională multidisciplinară – cu participare internaţională
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2012

METODA ELEMENTULUI DE FRONTIERĂ CU ELEMENTE LINIARE, PENTRU O REŢEA AXIALĂ ÎN "S"
Partea I

Ionel Doru BACIU, Ilare BORDEAŞU

BEM WITH LINIARE ELEMENTS, FOR AN AXIAL"S" CASCADE
First part

This paper presents boundary element method (BEM), with linear elements, for the numerical simulation of ideal incompressible fluid, for a reversible cascade"S" axial profiles. BEM apply for Laplace's equation depending on flow and hydrodynamic field, speed and pressure are obtained, inside of domain analysis.

Cuvinte cheie: elemente liniare, BEM, ecuaţia lui Laplace, puncte unghiulare
Keywords: linear elements, BEM, Laplace equation, angular points

1. Introducere

Pentru exploatarea eficientă a potenţialului hidroenergetic în regim de funcţionare şi de stocare a energiei hidraulice, este necesar ca centralele hidro-electrice, să fie echipate cu maşini hidraulice reversibile, numite pompe-turbine.

Cu ajutorul metodei elementului de frontieră, se pot crea astfel de profile.

2. Metoda elementului de frontieră cu elemente liniare

M.E.F. – Metoda Elementului de Frontieră este un algoritm numeric pentru rezolvarea aproximativă a ecuaţiei lui Laplace într-un domeniu plan închis şi mărginit $\overline{\Omega}$, cu condiţii la limită date.

Ideea fundamentală care stă la baza M.E.Fr. este transformarea ecuaţiei Laplace într-o ecuaţie integrală dată pe frontiera domeniului.

Se consideră pe domeniul Ω (figura 1). ecuaţia lui Laplace: Δu = 0. Se poate arăta, că orice soluţie u a ecuaţiei lui Laplace verifică ecuaţia integrală de forma unde $\zeta \in \overline{\Omega}$:

$$c(\zeta)\, u(\zeta) = \int_\Gamma q(z)\, u^*(z,\zeta) ds_z - \int_\Gamma u(z) q^*(z,\zeta) ds_z, \qquad (1)$$

Ecuaţia Laplace $\Delta u = 0$, precum şi ecuaţia integrală (1) au o infinitate de soluţii.

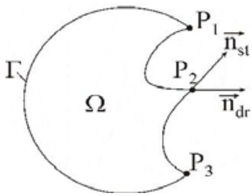

Fig. 1 Puncte unghiulare P_1, P_2, P_3 pe frontiera Γ

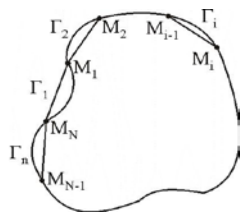

Fig. 2 Discretizarea frontierei Γ

Ecuaţia Laplace $\Delta u = 0$, precum şi ecuaţia integrală (1) au o infinitate de soluţii; pentru a determina o anumită soluţie, se impun condiţii pe frontiera Γ funcţiei u, respectiv a derivatei acesteia $\partial u/\partial n$.

Dacă se impune o valoare a_ζ, funcţiei u într-un punct ζ Є Γ, condiţia $u(\zeta) = a_\zeta$, se numeşte condiţie esenţială, iar o condiţie $q(\zeta) = b_\zeta$, se numeşte condiţie naturală.

În general, problema determinării unei soluţii concrete a ecuaţiei Laplace, este o problemă cu condiţii la limită mixtă, de forma:

$$\begin{cases} u(\zeta) = f(\zeta) - \text{ pentru } \zeta \in \Gamma_1 \\ q(\zeta) = g(\zeta) - \text{ pentru } \zeta \in \Gamma_2 \end{cases} \qquad (2)$$

cu $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, iar $f(\zeta)$ şi $g(\zeta)$ sunt funcţii date pe frontierele Γ_1, respectiv Γ_2.

Pentru unicitatea soluţiei u este necesar ca frontiera $\Gamma_1 \neq \emptyset$ (în cazul în care $\Gamma_1 = \emptyset$, adică pentru o problemă tip Neuman ecuaţia Laplace are o familie de soluţii de forma $\{u_0 + C,\ C \in R\}$, unde u_o este o soluţie fixată).

Având ecuaţia integrală (1) cu condiţiile la limită (2) se poate trece la rezolvarea ei numerică, adică la aplicarea M.E.Fr.

Se observă că este suficient să rezolvăm ecuaţia (1) pe conturul Γ, deoarece, dacă $\zeta \in \Omega$, atunci $c(\zeta)=1$ şi relaţia (1) devine:

$$u(\zeta) = \int_\Gamma q(z)\, u^*(z,\zeta) ds_z - \int_\Gamma u(z) q^*(z,\zeta) ds_z, \tag{3}$$

Întrucât elementele de sub semnul integrală sunt cunoscute după rezolvarea ecuţiei (1) pe Γ, relaţia (3) ne permite să calculăm pe u în orice punct a domeniului Ω.

Aplicarea M.E.F. – cu elemente liniare – impune două tipuri de aproximări care se efectuează simultan:

1. ***discretizarea frontierei*** - adică se consideră pe frontiera Γ un şir de N puncte M_1, M_2, ..., M_N - şi notând cu Γ_i segmentul $\overline{M_{i-1}, M_i}$ (pentru i = 1, $\Gamma_1 = \overline{M_N M_1}$) se înlocuieşte frontiera Γ cu linie poligonată $\overline{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$ - figura 2;

2. ***aproximarea liniară*** a funcţiilor u şi $q = \partial u / \partial n$ pe fiecare element Γ_i.

Se notează cu x_i şi y_i coordonatele punctului M_i. Dacă pe elementul de frontieră Γ_i, se introduce un parametru $t \in [-1,1]$ astfel încât pentru punctul M_{i-1} valoarea lui t să fie t = -1 şi pentru punctul M_i valoarea lui t să fie t =1, coordonatele unui punct $M_j (x,y) \in \Gamma_j$, verifică relaţiile:

$$\begin{cases} x = 1/2\, (x_j - x_{j-1})\, t + 1/2\, (x_j + x_{j-1}) \\ y = 1/2\, (y_j - y_{j-1})\, t + 1/2\, (y_j + y_{j-1}) \end{cases} \tag{4.a}$$

sau

$$\begin{cases} x = 1/2\ \ x_{j-1} (1 - t) + 1/2\ \ x_j (1 + t) \\ y = 1/2\ \ y_{j-1} (1 - t) + 1/2\ \ y_j (1 + t) \end{cases} \tag{4.b}$$

Fie în continuare u_i şi q_i valorile – deocamndată necunoscute - ale funcţiei u şi a derivatei sale normale $\partial u / \partial n$ în punctul M_i ($i = \overline{1 - N}$).

Se presupune că u şi $q = \partial u / \partial n$, variază liniar în funcţie de t, pe elementul de frontieră Γ_j pentru orice t Є [-1,1] (adică pentru orice M (t) Є Γ_j). Se pot scrie pentru u şi q, relaţiile;

$$\begin{cases} u(t) = u_{j-1\ 1}(t) + u_{j\ 2}(t) \\ q(t) = q_{j-1\ 1}(t) + q_{j\ 2}(t) \end{cases} \tag{5}$$

Se revine la ecuaţia (1), în care se înlocuieşte frontiera Γ cu $\overline{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$ şi u respectiv q, cu expresiile lor din (5). Efectund calculele se obţine un sistem liniar de ecuaţii:

$$\sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^{N} H_{ij} u_j = 0 \tag{6}$$

În acest sistem necunoscutele sunt $u_1,...,u_N$ şi derivatele lor $q_{1,}...,q_N$.

Coeficienţii G_{ij} şi H_{ij} sunt nişte integrale curbilinii (pe segmentele Γ_j) din funcţii cunoscute, care se reduc la nişte integrale definite între -1 şi 1, în raport cu parametrul t, obţinându-se un sistem de N ecuaţii cu 2N necunoscute: valorile aproximative ale funcţiei necunoscute u şi valorile derivaţiei sale normale în punctele M_1, M_2, ...M_N.

$$H_{ii} = -\sum_{i=1, j \neq i}^{N} H_{ij} \tag{7}$$

Aşadar ecuaţia integrală (1), dată pe conturul Γ, se reduce la un sistem de N ecuaţii cu 2N necunoscute: ***valorile aproximative ale funcţiei necunoscute u şi valorile derivaţiei sale normale***.

Pentru a determina o soluţie dată, ce corespunde unei probleme concrete, în relaţiile (6), trebuie ca, K mărimi u_i şi a N - K mărimi q_j.

Ca şi în cazul continuu trebuie să avem K ≠ 0. În general, dacă relaţiilor (6) li se adaugă N relaţii liniare de forma:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} q_j\right) = \gamma_i, \quad i = \overline{1,N} \tag{8}$$

atunci relaţiile (6) au soluţie unică (în ipoteza că matricea sistemului liniar este de rangul 2N).

3. Tratarea punctelor unghiulare

Dacă M_j este un punct unde frontiera Γ nu este netedă, atunci în acest punct există o discontinuitate a direcţiei normalei; va exista o normală la stânga $\overrightarrow{n_j^s}$ şi una la dreapta $\overrightarrow{n_j^d}$, (figura 1).

În sistemul liniar (6),se obţin, în fiecare ecuaţie, doi termeni:

$$q_j^d \int_{\Gamma_{j+1}} {}_1u_{M_i}^* ds + q_j^s \int_{\Gamma_j} {}_2u_{M_i}^* ds, \qquad i = \overline{1,N} \tag{9}$$

în locul a: G_{ij}, q_j .unde $q_j^d = (\partial u / \partial n)_j^d$; $q_j^s = (\partial u / \partial n)_j^s$.

Aşadar orice punct unghiular măreşte cu unu numărul necunoscutelor.

Ca sistemul de ecuaţii (6), împreună cu condiţiile la limită (8), să fie determinat şi în cazul existenţei punctelor unghiulare (reţeaua figura 3), este necesar să se cunoască pentru orice asemenea punct o relaţie liniară între q_j^d şi q_j^s.

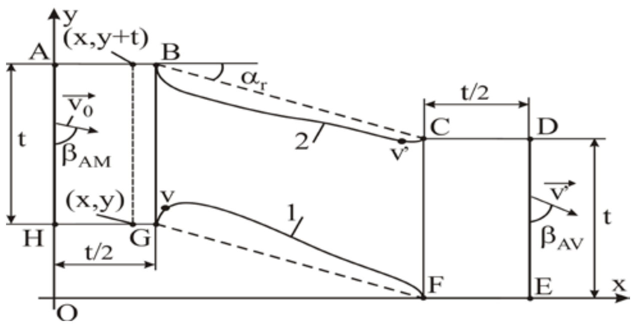

Fig. 3 Domeniul de analiză pentru o reţea axială plană de turbină

4. Concluzii

■ Metoda M.E.F., cu elemente liniare, în hidrodinamica turbomaşinilor, s-a dovedit a fi eficientă, operativă şi de mare precizie.

■ Aplicarea M.E.F. cu elemente liniare la ecuatia lui Laplace, la valorile funcţiei de curent, se obţin valorile funcţiei, derivata ei normală pe frontiera domeniului de analiză şi de circulaţie.

BIBLIOGRAFIE

[1] Baciu, I.D., *Experimental tests in wind tunnel for an axial cascade of reversible profiles, Hidraulică*, Revista de hidraulică – pneumatică – ungere centralizată – mecatronică, nr.1 (18), mai 2006, Editată de Institutul de cercetări pentru hidraulică şi pneumatică,ISSN / 1453 – 7303, serie nouă, pag. 39-42.

[2] Baciu, I.D., *Studiul unei familii de reţele axiale reversibile cu aplicaţii la proiectare turbomaşinilor*, Teză de doctorat,2008.

[3] Bărglăzan, M., Baciu, I.D., *About Thickness of Aero-Hydrodynamic Profiles*, Ştiinţă şi inginerie, vol.8, Editura AGIR, Bucureşti, 2005, ISBN 973-8130-82-4, ISBN 973-720-015-2, pag. 79-84.

Asist.Dr.Ing. Ionel Doru BACIU
Universitatea „Politehnica” din Timişoara
membru AGIR
e-mail: dodo.i.baciu@gmail.com

Prof.Dr.Ing. Ilare BORDEAŞU
şef colectiv Maşini Hidraulice
Universitatea „Politehnica” din Timişoara
membru AGIR
e-mail: ilarica59@gmail.com