



A XII-a Conferință Națională multidisciplinară – cu participare internațională  
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii românești",  
SEBEȘ, 2012

## **GENERAREA ROȚILOR DINȚATE ELIPTICE PLANE ȘI DINȚI ÎNCLINAȚI CU AJUTORUL FREZEI MELC Partea a II-a**

Lucian MÎNTOIU, Laurențiu MUREȘAN,  
Călin CUREA, Mihai SUDRIJAN

### **GENERATION OF PLANAR AND HELICAL ELLIPTICAL GEARS BY HOB (II)**

The paper presents the basic elements of generation planar and helical elliptical gears by hob in vision of Profesor Litvin.

Cuvinte cheie: centroidă eliptică, freză melc  
Keywords: elliptical centroid, cutter worm

#### **4. Generarea suprafeței $\Sigma_1$ a roților dințate eliptice de către scula pieptene**

În continuare se prezintă generarea suprafeței  $\Sigma_1$  a roților dințate eliptice de către scula pieptene. Obținerea lui  $\Sigma_1$  este bazată pe următorii pași:

(i) Determinarea transformării de coordonate, dintre sistemele de coordonate  $S_c$  și  $S_1$ , care permite familiei suprafețelor de generare ale sculei pieptene să fie reprezentate în sistemul de coordonate  $S_1$  sub formă triparametrică, astfel,

$$\vec{r}_1(u_c, l_c, \theta) = M_{1c}(\theta) \vec{r}_c(u_c, l_c) \quad (16)$$

unde  $M_{1c}$  reprezintă transformarea de coordonate în procedură aplicată, de la  $S_c$ , la  $S_1$ .

(ii) Deducerea ecuației angrenării

$$f_{1c}(u_c, l_c, \theta) = 0 \quad (17)$$

corelează parametrii  $(u_c, l_c, \theta)$ . Considerarea simultană a ecuațiilor (16) și (17) determină suprafața  $\Sigma_1$ , a roții dințate eliptice generate de către scula pieptene cu dinți înclinați.

Transformarea de coordonate din sistemul de coordonate  $S_c$  în  $S_1$ , se face astfel:

Deducerea ecuației (16) este realizată în modul următor:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1(u_c, l_c, \theta) &= M_{1c}(\theta) \bar{r}_c(u_c, l_c) = M_{1n}(\theta) M_{nf}(\theta) M_{fc}(\theta) \bar{r}_c(u_c, l_c) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_f^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_f^{(O_2)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{r}_c(u_c, l_c) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & x_f^{(O_c)} \cos \psi_1 - y_f^{(O_1)} \sin \psi_1 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & -x_f^{(O_c)} \sin \psi_1 - y_f^{(O_1)} \cos \psi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{r}_c(u_c, l_c) \quad (18) \end{aligned}$$

În continuare, se va deduce matricea ecuației angrenării  $f_{1c}(u_c, l_c, \theta) = 0$ .

Se consideră că, scula pieptene este furnizată de către suprafața generatoare  $\Sigma_c$ , reprezentată, în spațiul 3D, de către funcția vectorială  $\bar{r}_c(u_c, l_c)$ .

Utilizând transformarea de coordonate, din sistemul de coordonate,  $S_c$ , în  $S_1$ , se obține în  $S_1$ , familia suprafețelor de generare  $\bar{r}_1(u_c, l_c, \theta)$ .

Suprafața generată a roții dințate necirculare este determinată ca înfășurătoare la familia suprafețelor  $\bar{r}_1(u_c, l_c, \theta)$ . În geometria diferențială, înfășurătoarea la familia suprafețelor  $\bar{r}_1(u_c, l_c, \theta)$  poate fi

determinată prin considerarea simultană a funcției vectoriale  $\vec{r}_1(u_c, l_c, \theta)$  și a ecuației angrenării:

$$f(u_c, l_c, \theta) = \left( \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_c} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial l_c} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = 0. \quad (19)$$

O abordare matriceală pentru obținerea ecuației angrenării, care permite să se simplifice și să se determine calculul suprafeței generate de către scula pieptene a fost dezvoltată și este realizată, după cum urmează.

Familia suprafețelor generatoare ale sculei pieptene este reprezentată în sistemul de coordonate  $S_1$ , sub formă triparametrică, de către ecuația (18). Considerând coordonatele carteziene în locul coordonatelor omogene, suprafața dintelui roții dințate poate fi obținută astfel:

$$\begin{aligned} \rho_1(u_c, l_c, \theta) &= \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rho_c(u_c, l_c) + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f^{(O_c)} \\ -y_f^{(O_1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= L_{1c} \bar{\rho}_c + L_{1c} \bar{R} \end{aligned} \quad (20)$$

Aici

$$\bar{R} = \overline{O_n O_c} = \begin{bmatrix} x_f^{(O_c)} - y_f^{(O_1)} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

Abordarea propusă permite să se obțină: (i) viteza relativă a sculei pieptene,  $c$ , în raport cu roata dințată 1,

$$\vec{v}_1^{(c1)} = \frac{d\bar{\rho}_1}{dt} = \dot{L}_{1c} \bar{\rho}_c + \dot{L}_{1c} \bar{R} + L_{1c} \dot{\bar{R}} \quad (22)$$

(ii) și viteza relativă a roții dințate 1, în raport cu scula pieptene,  $c$ ,

$$\vec{v}_c^{(1c)} = -L_{c1} \vec{v}_1^{(c1)} = -L_{c1} \left( \dot{L}_{1c} \bar{\rho}_c + \dot{L}_{1c} \bar{R} + L_{1c} \dot{\bar{R}} \right) \quad (23)$$

Expresia finală a ecuației angrenării este:

$$f^{(c1)}(u_c, l_c, \theta) = (\dot{L}_{1c} \bar{n}_c^{(c)}) \cdot (\dot{L}_{1c} \bar{\rho}_c + \dot{L}_{1c} \bar{R} + L_{1c} \dot{\bar{R}}) = 0 \quad (24)$$

sau

$$f_c^{(1c)}(u_c, l_c, \theta) = \bar{n}_c^{(c)} \cdot [-L_{c1} (\dot{L}_{1c} \bar{\rho}_c + \dot{L}_{1c} \bar{R} + L_{1c} \dot{\bar{R}})] = 0 \quad (25)$$

unde

$$\dot{L}_{1c} = \begin{bmatrix} -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 \\ -\cos \psi_1 & -\sin \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}_1 \quad (26)$$

$$\dot{\bar{R}} = \dot{\bar{O}}_n \dot{\bar{O}}_c = [\dot{x}_f^{(O_c)} \quad -\dot{y}_f^{(O_1)} \quad 0]^T \quad (27)$$

Derivatele  $\dot{x}_f^{(O_c)}$ ,  $\dot{y}_f^{(O_1)}$  și  $\dot{\psi}_1$  sunt:

$$\dot{x}_f^{(O_c)} = \frac{dx_f^{(O_c)}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (28)$$

$$\dot{y}_f^{(O_1)} = \frac{dy_f^{(O_1)}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (29)$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{d\psi_1}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (30)$$

unde,  $\frac{dx_f^{(O_c)}}{d\theta}$ ,  $\frac{dy_f^{(O_1)}}{d\theta}$  și  $\frac{d\psi_1}{d\theta}$  sunt date de ecuațiile (11), (12) și, respectiv, (13).

Suprafața dintelui roții dințate eliptice cu dinți înclinați este determinată de către considerarea simultană a ecuației (20), cu ecuația (24) sau (25).

## 5. Generarea de către freza melc a roților dințate eliptice cu dinți înclinați

Pentru generarea de către freza melc a roților dințate eliptice cu dinți înclinați, se vor deduce spirele elicoidale ale suprafeței generatoare reprezentate în sistemul de coordonate  $S_w$ . Aplicarea unui melc de rectificare sau a unei freze melc pentru generarea roților dințate eliptice este utilă pentru îmbunătățirea productivității și a siguranței în funcționare a roților dințate generate.

O suprafață a spirei elicoidale  $\Sigma_w$ , care este în angrenare imaginară cu suprafața dintelui sculei pieptene  $\Sigma_c$ , este momentan determinată. Condiția de angrenare dintre ambele suprafețe  $\Sigma_w$  și  $\Sigma_c$ , permite să se determine suprafața spirelor elicoidale ale melcului.

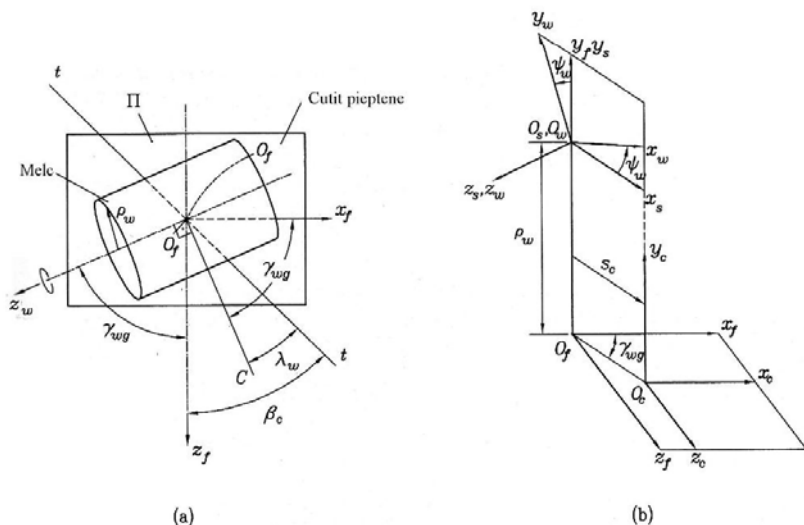


Fig. 5 Pentru determinarea melcului: (a) reglarea melcului în raport cu scula pieptene; (b) aplicarea sistemelor de coordonate

Procedura este următoarea:

(1) Axa melcului și a roții dințate, formează unghiul de încrucișare  $\gamma_{wg}$ .

Figura 5, (a) arată reglarea axoidei melcului pe axa din planul  $\Pi$ , al sculei pieptene. Unghiul  $\gamma_{wg}$  este dat prin expresia,

$$\gamma_{wg} = \frac{\pi}{2} - \beta_c + \lambda_w \quad (31)$$

unde,  $\beta_c$  este unghiul elicei sculei pieptene cu dinți înclinați, iar  $\lambda_w$  – este unghiul spirei melcului.

(2) Linia  $t-t$ , în punctul de divizare  $O_f$ , și elicea roții dințate (vezi figura 5, (a)), sunt în tangență.

(3) Sistemele de coordonate mobile  $S_c$  și  $S_w$ , sunt rigid conectate la suprafețele  $\Sigma_c$  și, respectiv,  $\Sigma_w$ . Sistemele de coordonate fixe  $S_f$  și  $S_s$ , sunt considerate pentru determinarea mișcării sculei pieptene și, respectiv, suprafața dintelui melcului (vezi figura 5, (b)).

(4) Suprafața  $\Sigma_c$  este considerată ca dată și execută următoarele mișcări:

(i) Translație  $s_c$  a sistemului de coordonate  $S_c$ , de-a lungul liniei drepte  $O_f - C$  (vezi figura 5, (b)). Linia dreaptă  $O_f - C$  formează unghiul  $\gamma_{wg}$  în raport cu axa  $x_f$  (vezi figura 5, (a)).

(ii) Rotația sistemului de coordonate  $S_w$  în jurul axei  $z_s$  cu unghiul  $\psi_w$ , determinat prin:

$$\psi_w = \frac{s_c}{\rho_w}, \quad (32)$$

unde  $\rho_w$  este raza de divizare a melcului de rectificare.

(5) Suprafața spirelor elicoidale ale melcului,  $\Sigma_w$ , este obținută prin considerarea simultană a ecuației vectoriale

$$\vec{r}_w(u_c, l_c, \psi_w) = M_{wc}(\psi_w) \vec{r}_c(u_c, l_c) \quad (33)$$

și ecuația angrenării

$$\left( \frac{\partial \vec{r}_c}{\partial u_c} \times \frac{\partial \vec{r}_c}{\partial l_c} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_c}{\partial \psi_w} = 0 \quad (34)$$

Aici,  $\psi_w$  este parametrul generalizat al angrenării, iar  $M_{wc}$  este matricea  $4 \times 4$ , care reprezintă transformarea de coordonate a coordonatelor omogene din sistemul  $S_c$  în sistemul  $S_w$ .

Cu toate acestea, se va aplica, pentru obținerea ecuației (34), abordarea matriceală prezentată pentru cazul generării sculei pieptene.

Suprafața elicoidală a spirei melcului,  $\Sigma_w$ , poate fi considerată pentru scopul de simplificare ca o suprafață cu doi parametri independenți  $(h_w, \varepsilon_w)$ .

## 6. Generarea suprafeței $\Sigma_1$ a roții dințate eliptice de către un melc

Se prezintă generarea suprafeței  $\Sigma_1$  a roții dințate eliptice de către un melc. Obținerea suprafeței  $\Sigma_1$  de către o suprafață  $\Sigma_w$  este bazată pe următoarea procedură (vezi figura 6):

(i) Două sisteme de coordonate  $S_w$  și  $S_1$ , sunt conectate rigid la suprafața spirei elicoidale a melcului și la suprafața dintelui roții dințate, care va fi determinată.

Un sistem de referință fix  $S_f$  este considerat pentru definirea mișcărilor sistemelor  $S_w$  și  $S_1$ .

(ii) Suprafața elicoidală a melcului,  $\Sigma_w$ , este dată de către funcția vectorială  $\bar{R}_w(h_w, \varepsilon_w)$ .

(iii) Două seturi de mișcări sunt furnizate melcului:

(a) Rotația melcului în jurul axei  $z_w$ , cu unghiul  $\phi_w$ .

(b) Translația,  $s_w$ , de-a lungul axei  $z_f$ , care este paralelă cu axa roții dințate.

Sistemul de coordonate  $S_s$  este un sistem de coordonate mobil care este translatat cu sistemul  $S_w$ .

(iv) Rotația și translația melcului este acompaniată de către rotația și translația roții dințate eliptice în modul următor:

(a) Rotația  $\psi_1$ , în jurul axei  $z_1$  a roții dințate.

(b) Translația definită de poziția  $y_f^{(O_1)}$  de-a lungul axei  $y_f$ .

Mărimile,  $\psi_1$  și  $y_f^{(O_1)}$ , pot fi determinate ca funcții ale unghiului polar  $\theta$  (vezi ecuațiile (5) și (6)). Mărimile,  $\psi_1$  și  $y_f^{(O_1)}$ , sunt corelate cu mișcărilor  $\phi_w$  și  $s_w$ , de către funcțiile:

$$y_f^{(O_1)}(\theta) = -r(\theta)\sin\mu \quad (35)$$

$$\psi_1 = \theta + \mu - \mu_0, \quad \mu_0 = \frac{\pi}{2} \quad (36)$$

și o nouă funcție va fi determinată, astfel:

$$g(\phi_w, s_w, \theta) = 0 \quad (37)$$

## BIBLIOGRAFIE

[1] Litvin, F.L., Fuentes-Aznar, A., Gonzales-Perez, I., *Kenichi Hayasca: Noncircular Gears. Design and Generation*. 2010 Cambridge University Press.

Drd.Ing. Lucian MÎNTOIU  
Director de Producție la S.C. Nova-Grup srl Cugir  
membru AGIR

Ing. Laurențiu MUREȘAN  
Administrator Special la S.C. Fabrica de Arme Cugir S.A.  
membru AGIR

Col. Dr.Ing. Călin CUREA  
Șef Recepție S.C. Militară la Fabrica de Arme Cugir S.A.  
membru AGIR

Dr.Ing. Mhai SUDRIJAN  
Inginer de angrenaje la S.C. Sculăria srl Cugir  
Președinte Sucursala Alba a AGIR