



A XII-a Conferință Națională multidisciplinară – cu participare internațională  
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii românești",  
SEBEȘ, 2012

## GENERAREA ROȚILOR DINȚATE ELIPTICE PLANE ȘI DINȚI ÎNCLINAȚI CU AJUTORUL FREZEI MELC Partea a III-a

Lucian MÎNTOIU, Laurențiu MUREȘAN,  
Călin CUREA, Mihai SUDRIJAN

### GENERATION OF PLANAR AND HELICAL ELLIPTICALGEARS BY HOB (III)

The paper presents the basic elements of generation planar and helical elliptical gears by hob in vision of Profesor Litvin.

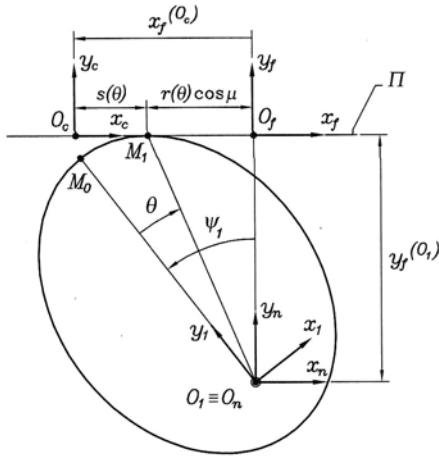
Cuvinte cheie: centroidă eliptică, freză melc  
Keywords: elliptical centroid, cutter worm

#### 6. Generarea suprafeței $\Sigma_1$ a roții dințate eliptice de către un melc -continuare

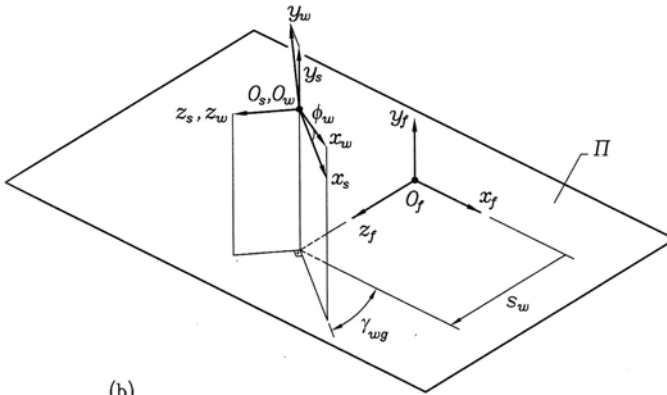
(v) Transformarea de coordonate dintre sistemele,  $S_w$  și  $S_1$ , determină familia suprafețelor spirelor elicoidale ale melcului în sistemul  $S_1$ , astfel,

$$\vec{r}_1(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) = M_{1w}(\phi_w, s_w) \vec{R}_w(h_w, \varepsilon_w) \quad (38)$$

Aici,  $\phi_w$  și  $s_w$ , sunt parametrii independenți generalizați ai mișcării, care înseamnă că este un proces de dublă înfășurare,



(a)



(b)

Fig. 6 Sistemele de coordonate aplicat pentru generarea roții dințate eliptice de către melcul de rectificare: (a) la roata dințată eliptică; (b) la melc

iar matricea  $4 \times 4, M_{1w}$ , descrie transformarea din sistemul  $S_w$  în sistemul  $S_1$ . Deducerea ecuației (38) este realizată astfel:

$$\bar{r}_1(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) = M_{1f}(\phi_w, s_w) \mathbf{M}_{fs}(s_w) \mathbf{M}_{sw}(\phi_w) \bar{\mathbf{R}}_w(h_w, \varepsilon_w) \quad (39)$$

unde

$$M_{1f}(\phi_w, s_w) = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & -y_f^{(O_1)} \sin \psi_1 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & -y_f^{(O_1)} \cos \psi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$M_{fs}(s_w) = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{wg} & 0 & -\sin \gamma_{wg} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \rho_w \\ \sin \gamma_{wg} & 0 & \cos \gamma_{wg} & s_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$M_{sw}(\phi_w) = \begin{bmatrix} \cos \phi_w & -\sin \phi_w & 0 & 0 \\ \sin \phi_w & \cos \phi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

(vi) Deoarece generarea suprafeței  $\Sigma_1$ , a roții dințate eliptice, implică un proces de dublă înfășurare, există două ecuații ale angrenării

$$f_1^{(w1)}(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) = 0 \quad (43)$$

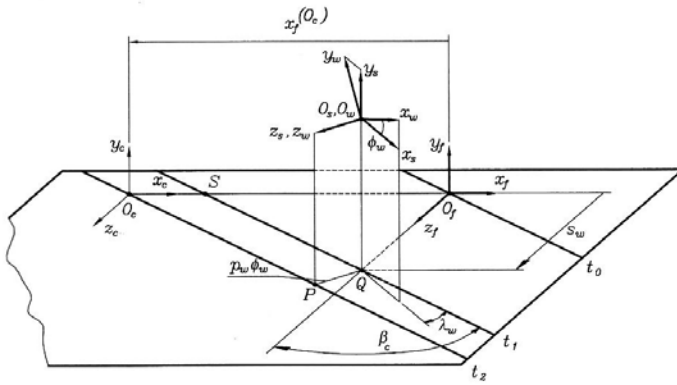
$$f_2^{(w1)}(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) = 0 \quad (44)$$

care corelează parametrii  $(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w)$ . Considerarea simultană a ecuațiilor (38), (43) și (44) determină suprafața  $\Sigma_1$  a roții dințate eliptice.

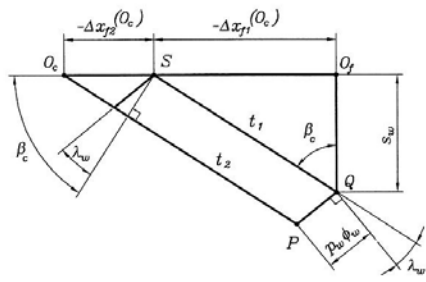
Se va deduce funcția  $g(\phi_w, s_w, \theta) = 0$ . Deducerea este realizată în modul următor (vezi figura 7):

(i) Se consideră o sculă pieptene imaginară fiind simultan în angrenare cu roata dințată eliptică și cu melcul. În poziția inițială, sistemul  $S_c$  coincide cu sistemul  $S_f$ , iar linia tangentă comună  $t-t$  dintre cele trei suprafețe,  $\Sigma_w, \Sigma_1$  și  $\Sigma_c$ , este în poziția  $t_0$ .

(ii) Datorită rotației și translației melcului, cu  $\phi_w$  și  $s_w$ , tangenta comună,  $t-t$ , va ocupa poziția  $t_2$ . Locația sistemului  $S_c$ , în  $S_f$ , este determinată de către  $x_f^{(O_c)}$ .



(a)



(b)

Fig. 7 Pentru determinarea funcției  $g(\phi_w, s_w, \theta) = 0$

(iii) Deplasarea sistemului  $S_c$  poate fi obținută ca sumă a deplasărilor independente  $\Delta x_{f_1}^{(O_c)}$  și  $\Delta x_{f_2}^{(O_c)}$ :

$$\Delta x_f^{(O_c)} = \Delta x_{f_1}^{(O_c)} + \Delta x_{f_2}^{(O_c)}. \quad (45)$$

Deplasarea  $\Delta x_{f_1}^{(O_c)} = \overline{O_f S}$  este cauzată de către translația  $s_w$  și este definită de către pozițiile  $t_0$  și  $t_1$ .

Deplasarea  $\Delta x_{f_2}^{(O_c)} = \overline{S O_c}$  este cauzată de către rotația  $\phi_w$  și este definită de către pozițiile  $t_1$  și  $t_2$ .

(iv) Ilustrațiile figurii 7 (b) oferă,

$$-\Delta x_{f_1}^{(O_c)} = \overline{O_f S} = \text{tg} \beta_c s_w \quad (46)$$

$$-\Delta x_{f_2}^{(O_c)} = \overline{SO_c} = \frac{p_w \cos \lambda_w}{\cos \beta_c} \phi_w, \quad (47)$$

unde  $p_w$  este pasul melcului.

(v) Deoarece  $x_f^{(O_c)}$  depinde de unghiul polar  $\theta$  (vezi ecuația (4)), funcția  $g(\phi_w, s_w, \theta) = 0$  este obținută în final ca

$$g(\phi_w, s_w, \theta) = x_f^{(O_c)}(\theta) + \operatorname{tg} \beta_c s_w + \frac{p_w \cos \lambda_w}{\cos \beta_c} \phi_w = 0 \quad (48)$$

## 7. Deducerea matricei ecuațiilor angrenării

Deducerea matricei ecuațiilor angrenării  $f_1^{(w1)}(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) = 0$  și  $f_2^{(w1)}(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) = 0$ , este realizată în modul următor:

(i) Vectorul de poziție  $\bar{r}_1(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w)$  în coordonate omogene este dat de către

$$\begin{aligned} \bar{r}_1(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) &= M_{1w}(\phi_w, s_w) \bar{R}(h_w, \varepsilon_w) = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sin \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cos \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & s_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{R}_w(h_w, \varepsilon_w), \quad (49) \end{aligned}$$

unde

$$a_{11} = \cos \psi_1 \cos \psi_{wg} \cos \phi_w + \sin \psi_1 \cos \phi_w \quad (50)$$

$$a_{12} = -\cos \psi_1 \cos \gamma_{wg} \sin \phi_w + \sin \psi_1 \cos \phi_w \quad (51)$$

$$a_{13} = -\cos \psi_1 \sin \gamma_{wg} \quad (52)$$

$$a_{21} = -\sin \psi_1 \cos \gamma_{wg} \cos \phi_w + \cos \psi_1 \sin \phi_w \quad (53)$$

$$a_{22} = \sin \psi_1 \cos \gamma_{wg} \sin \phi_w + \cos \psi_1 \cos \phi_w \quad (54)$$

$$a_{23} = \sin \psi_1 \sin \gamma_{wg} \quad (55)$$

$$a_{31} = \sin \gamma_{wg} \cos \phi_w \quad (56)$$

$$a_{32} = -\sin \gamma_{wg} \sin \phi_w \quad (57)$$

$$a_{33} = \cos \gamma_{wg} \quad (58)$$

(ii) Vectorul de poziție  $\vec{r}_1(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w)$  este notat  $\bar{\rho}_1(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w)$ , în coordonate carteziene și poate fi reprezentat astfel,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1(h_w, \varepsilon_w, \phi_w, s_w) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \bar{\rho}_w(h_w, r_w) + \begin{bmatrix} \sin \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \\ \cos \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \\ s_w \end{bmatrix} = \\ &= L_{1w}(\phi_w, s_w) \bar{\rho}_w(h_w, \varepsilon_w) + \vec{R} \end{aligned} \quad (59)$$

Aici,  $L_{1w}$  este matricea  $3 \times 3$ , obținută prin eliminarea ultimului rând și a ultimei coloane a matricei  $4 \times 4$ ,  $M_{1w}$ . Matricea  $L_{1w}$  poate fi obținută de asemenea ca

$$L_{1w} = L_{1f} L_{fs} L_{sw}, \quad (60)$$

pe câtă vreme,  $\vec{R}$  este definit astfel,

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} \sin \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) & \cos \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) & s_w \end{bmatrix}^T \quad (61)$$

(iii) Considerând  $s_w$  constant ( $s_w = c$ ), viteza relativă a suprafeței elicoidale în raport cu suprafața dintelui roții poate fi obținută astfel,

$$\vec{v}_{1, s_w=c}^{(w1)} = \dot{\bar{\rho}} = \dot{L} \rho_w + \dot{\vec{R}} \quad (62)$$

unde

$$\dot{L}_{1w} = \dot{L}_{1f} L_{fs} L_{sw} + L_{1f} L_{fs} \dot{L}_{sw} \quad (63)$$

$$\dot{L}_{1f} = \begin{bmatrix} -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 \\ -\cos \psi_1 & -\sin \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}_1 \quad (64)$$

$$\dot{L}_{sw} = \begin{bmatrix} -\sin \phi_w & -\cos \phi_w & 0 \\ \cos \phi_w & -\sin \phi_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_w, \quad \dot{\phi}_w = -\frac{\cos \beta_c}{\rho_w \cos \lambda_w} \dot{x}_f^{(O_c)} \quad (65)$$

$$\dot{\vec{R}} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \dot{\psi}_1 - \sin \psi_1 \dot{y}_f^{(O_1)} \\ -\sin \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \dot{\psi}_1 - \cos \psi_1 \dot{y}_f^{(O_1)} \end{bmatrix} \quad (66)$$

atunci ecuația angrenării poate fi obținută astfel:

$$\vec{f}_1^{(w1)} = \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_{1, s_w=c}^{(w1)} = 0 \quad (67)$$

unde

$$\vec{n}_1 = L_{1w} \vec{n}_w \quad (68)$$

Aici,  $\vec{n}_w$  este versorul normalei la suprafața elicoidală.

(iv) Considerând  $\phi_w$  constant ( $\phi_w = c$ ), viteza relativă a suprafeței elicoidale în raport cu suprafața dintelui roții dințate poate fi obținută ca

$$\vec{v}_{1,\phi_w=c}^{(m1)} = \dot{\vec{p}}_1 = \dot{L}_{1w} \rho_w + \dot{\vec{R}} \quad (69)$$

unde

$$\dot{L}_{1w} = \dot{L}_{1f} L_{fs} L_{S_w} \quad (70)$$

$$\dot{L}_{1f} = \begin{bmatrix} -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 \\ -\cos \psi_1 & -\sin \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}_1 \quad (71)$$

$$\dot{\vec{R}} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \dot{\psi}_1 - \sin \psi_1 \dot{y}_f^{(O_1)} \\ -\sin \psi_1 (\rho_w - y_f^{(O_1)}) \dot{\psi}_1 - \cos \psi_1 \dot{y}_f^{(O_1)} \\ \dot{s}_w \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\dot{s}_w = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_c} \dot{x}_f^{(O_2)} \quad (73)$$

Atunci ecuația angrenării poate fi obținută astfel,

$$\vec{f}_2^{(w1)} = \vec{n} \cdot \vec{v}_{1,\phi_w=c}^{(w1)} = 0 \quad (74)$$

(O<sub>1</sub>) (O<sub>c</sub>)

(v) Deducerea derivatelor  $\dot{y}_f^{(O_1)}$ ,  $\dot{x}_f^{(O_2)}$  și  $\dot{\psi}_1$ , sunt:

$$\dot{y}_f^{(O_1)} = \frac{dy_f^{(O_1)}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (75)$$

$$\dot{x}_f^{(O_2)} = \frac{dx_f^{(O_2)}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (76)$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{d\psi_1}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (77)$$

unde  $\frac{dx_i^{(O_c)}}{d\theta}$ ,  $\frac{dy_i^{(O_i)}}{d\theta}$  și  $\frac{d\psi_1}{d\theta}$  sunt date de către ecuațiile (11), (12) și, respectiv, (13).

## BIBLIOGRAFIE

[1] Litvin, F.L., Fuentes-Aznar, A., Gonzales-Perez, I., *Kenichi Hayasca: Noncircular Gears. Design and Generation*. 2010 Cambridge University Press.

Drd.Ing. Lucian MÎNTOIU  
 Director de Producție la S.C. Nova-Grup srl Cugir  
 membru AGIR

Ing. Laurențiu MUREȘAN  
 Administrator Special la S.C. Fabrica de Arme Cugir S.A.  
 membru AGIR

Col. Dr.Ing. Călin CUREA  
 Șef Recepție S.C. Militară la Fabrica de Arme Cugir S.A.  
 membru AGIR

Dr.Ing. Mhai SUDRIJAN  
 Inginer de angrenaje la S.C. Sculăria srl Cugir  
 Președinte Sucursala Alba a AGIR