A XI-a Conferință Națională multidisciplinară – cu participare internațională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2011

ASUPRA UNUI SISTEM MECANIC DE TIP FILIPPOV

Oana PETCOVICIU

ABOUT A MECHANICAL SYSTEM FROM FILIPPOV TYPE

This paper presents the convergence property for a class of non-smooth dynamical system, address primarily to Filippov system, namely monotone measure diferential inclusions. The theory of Filippov offer a generalized definition of the solution of diferential equation which includes system with a discontinuous right – hand side.

Keywords: nonsmooth mechanical system, the theory of Filippov, dry friction
Cuvinte cheie: sistem mecanic neneted, teoria Filippov, frecare uscată

1. Introducere

În ultimii ani s-a dezvoltat un domeniu de cercetare în mecanică, care se ocupă cu studiul sistemelor mecanice nenetede. Un rol deosebit în studiul acestor sisteme mecanice îi revine analizei matematice cu ajutorul căreia se pot efectiv descrie relațiile matematice existente între parametrii sitemelor mecanice nenetede de studiat.

Cadrul matematic oferă pe lângă descrierea comportametului unilateral şi a structurii sistemelor mecanice nenetede şi metodele numerice de integrare care pot furniza informații cantitative despre mişcarea acestor sisteme.

Există o literatură de specialitate suficient de complexă care prezintă informații despre existența şi unicitatea soluțiilor sistemelor dinamice continue, însă ecuațiile diferențiale care se obțin în cazul sistemelor mecanice a căror mişcare prezintă salturi pot fi discontinue.

Teoria lui Filippov [1-3], furnizează o definiție generalizată pentru soluția ecuațiilor diferențiale de ordinil doi ce includ sistemele mecanice care prezintă discontinuitate la dreapta.

Soluția $x(t)$ în sens Filippov a ecuației diferențiale cu discontinuitate la dreapta – aşa numitele sisteme Filippov, este absolut continuă în timp, adică nu prezintă discontinuitate în starea soluției $x(t)$.

2. Modelarea matematică a unui sistem mecanic de tip Filippov

Se consideră mişcarea orizontală a unui corp solid rigid de masa m fixat de un perete prin intermediul unui element elastic a cărui constantă este k. Corpul de masă m se mişcă pe suprafața unei benzi aspre, mişcarea executându-se cu o viteză constantă v.

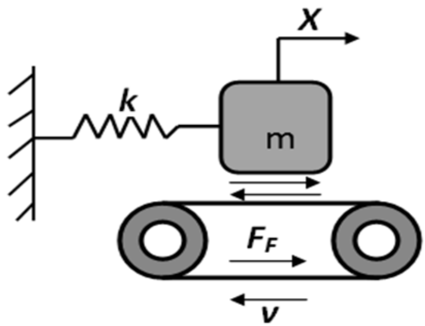

Fig. 1 Modelul fizic al sistemului mecanic considerat

În cele ce urmează vom nota poziția corpului cu x iar viteza sa cu m. Prin urmare viteza relativă va fi $v_r = \dot{x} - v$.

Frecarea uscată dintre corp şi bandă are loc cu forța de frecare F_F. Această forță de frecare este o funcție de viteza relativă v_r în faza de alunecare astfel:

$$F_F(v_r) = -\mu(v_r) G_N \operatorname{sign}(v_r); \mu(v_r) = \frac{\mu}{1+\delta(v_r)}; v_r \neq 0 \qquad (1)$$

unde $\mu(v_r)$ reprezintă coeficientul de frecare, iar G_N este reacțiunea normală. În faza de blocare amplitudinea forței de frecare este limitată de către maximum static al forței de frecare, adică:

$$F_s = \mu_s G_N \geq |F_F| \tag{2}$$

Diagrama de frecare în acest caz este redată în figura de mai jos, pentru $\delta > 0$ şi ține cont de efectul Stribeck, puterea forței de frecare scade cu creşterea vitezei relative.

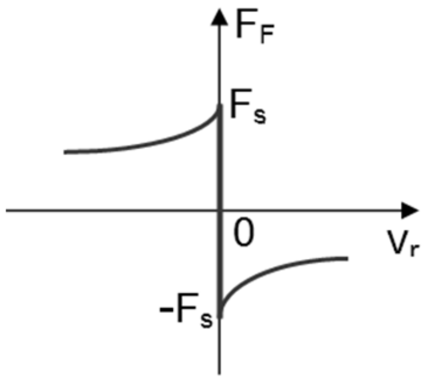

Fig. 2 Diagrama de frecare cu efect Stribeck

În continuare se va utiliza forța de frecare în faza de alunecare descrisă de către funcția $F_F(v_r)$ şi de restricția impusă forței de frecare în faza de blocare $|F_F| \leq F_s$ pe o mulțime de valori a legii forței:

$$F_F \in -\mu(v_r) G_N \mathrm{sign}(v_r) \tag{3}$$

unde sign(x) reprezintă mulțimea de valori a funcției sign.

Din ecuația fundamentală a dinamicii rezultă ecuație de mişcare :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_F \tag{4}$$

Ecuația de mişcare împreună cu mulțimea de valori numerice a forței de frecare furnizează următoarea incluziune diferențială de ordinul doi:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) \in -\mu\left(\dot{x}(t) - v\right) mg \cdot \mathrm{sign}\left(\dot{x}(t) - v\right) \tag{5}$$

valabilă aproape pe întregul interval de timp. Această incluziune diferențială de ordinul doi poate fi transformată într-o formă de ordinul întâi utilizând transpusa vectorului coloană x , $X^T = [x \;\; \dot{x}]$ astfel:

$$\dot{X}(t) \in \Phi(X(t)) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ -\frac{k}{m}x(t) - \mu(\dot{x}(t)-v)g \cdot \mathrm{sign}(\dot{x}(t)-v) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\Phi(X(t))$ reprezintă mulțimea valorilor funcției definită pe $\Re^n$.

Această incluziune diferențială prin utilizarea ”metodei convexe” Filippov, devine [4, 5]:

$f_-(X)$ şi $f_+(X)$ în hiperplanul $\Sigma = \left\{ X \in \Re^n \middle| v_r = 0 \right\}$

unde:

$$f_-(X) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{k}{m}x + \mu(\dot{x}(t)-v)g \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$f_+(X) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{k}{m}x - \mu(\dot{x}(t)-v)g \end{bmatrix} \quad (8)$$

în spațiul $S_- = \left\{ X \in \Re^n \middle| v_r < 0 \right\}$ respectiv $S_+ = \left\{ X \in \Re^n \middle| v_r > 0 \right\}$.

Prin urmare convexitatea părții din dreapta duce la incluziunea diferențială de forma:

$$\dot{X}(t) \in \Phi(X(t)) = \begin{cases} f_-(X(t)); & X \in S_- \\ co\left\{ f_-(X(t)),\ f_+(X(t)) \right\}; & X \in \Sigma \\ f_+(X(t)); & X \in S_+ \end{cases} \quad (9)$$

Această relație este echivalentă cu relația (6).

3. Simularea numerică

Se consideră următoarele valori ale parametrilor: m = 1 kg; k = 1 N/m; v = 0,2 m/s; $\mu_s = 0.1$; g = 10 m/s^2; F_s=1 N iar $\delta = 3$s/m,

se obține reprezentarea fazelor sistemului mecanic considerat ca şi în figura următoare:

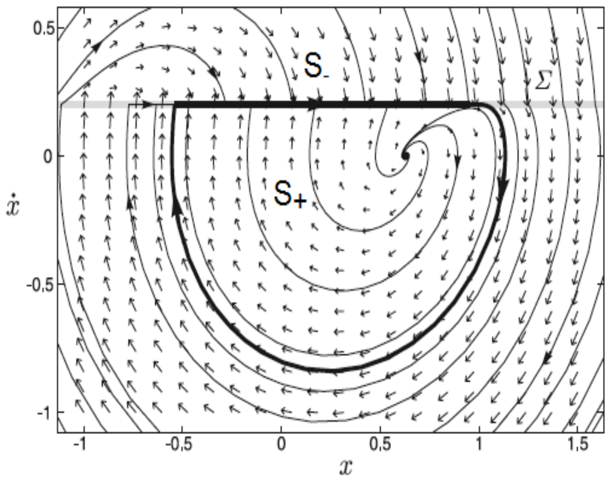

Fig. 3 Reprezentarea stărilor ”stick - slip” ale sistemului

4. Concluzii

■ Fazele de alunecare înainte şi înapoi se găsesc în subspațiul S_+, respectiv S_-, iar faza de blocare este conținută de spațiul $\sum$.

■ Punctul de echilibru este supus instabilității într-o limită stabilă, ciclică care oscilează între fazele de întoarcere la alunecare din S_- şi faza de blocare. Acest fenomen reprezintă faza de mişcarea ”stick - slip„.

■ Se poate de asemenea observa că soluția $\left(x, \dot{x}\right)$ prezintă o răsucire în reprezentarea fazelor atunci când soluția tinde de la faza de continuare a alunecare la faza de întoarcere la alunecare, şi invers,sau atunci când se intră în starea de blocare. La toate aceste momente forța de frecare sare la o altă valoare. În plus, accelerația $\ddot{x}\left(t\right)$ nu este definită la momentele instantanee de timp la care au loc astfel de modificări ale forței de frecare acesta fiind motivul pentru care incluziunea diferențială dată de relația (5) sau relațiile echivalente (6) şi (9) sunt descrise doar de către $\dot{X} = \left[\dot{x} \;\; \ddot{x}\right]^T$ pe aproape întregul interval de timp, adică nu şi pentru momentele instantanee de timp la care accelerația nu este definită.

BIBLIOGRAFIE

[1] Filippov, A.F., Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Mathematical Society Translations, Series 2 42* (1964), 199–123.

[2] Filippov, A.F., *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.

[3] Leine, R.I., Nijmeijer, H., *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems.* Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 18. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[4] Leine, R.I., Van Campen, D.H., *Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems*. Archive of Applied Mechanics 72, 2002, pag.138–146.

[5] Leine, R.I., Van Campen, D.H., Van de Vrande, B.L., *Bifurcations in nonlinear discontinuous systems*. International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems 23 (2), 2000, pag. 105–164.

[6] Sastry, S., *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, vol. 10 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, 1999.

[7] Schatzman, M., A class of nonlinear differential equations of second order in time. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 2*, 3 (1978), 355–373.

[8] Petcoviciu, O., Oprițescu, Cr., Toader, M.I., *Considerations on the Dynamic of mechanical System with unilateral links. Methods of simulation.* National Conference on Mechanics of Solids, Bucureşti, 2009.

[9] Moreau J.J., *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In Moreau J.J, Panagiotopoulos P.D. – Nonsmooth Mechanics and Applicati*ons. CISM Courses and Lectures, vol. 302, Springer, Viena, 1988.

Dr.Ing. Oana PETCOVICIU
profesor Grup Şcolar Industrial „Aurel Vlaicu” Arad,
membru AGIR
e-mail: oanapetcoviciu@yahoo.com