A XI-a Conferinţă Naţională multidisciplinară – cu participare internaţională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2011

ECUAŢIA PANTOGRAFULUI ŞI GENERALIZĂRI

Viorica MUREŞAN

THE PANTOGRAPH EQUATION AND ITS GENERALIZATIONS

In the paper we present some results about the pantograph equation and its generalizations. By using Picard operators technique we give existence, uniqueness and data dependence results for the solution of a Cauchy problem.

Keywords: differential equations, the pantograph equation, Operator Theory
Cuvinte cheie: ecuaţii diferenţiale, ecuaţia pantografului, teoria operatorilor

1. Introducere

Teoria ecuaţiilor diferenţiale este un domeniu important al matematicii datorită faptului că multe probleme din cele mai diverse domenii conduc la modele matematice care conţin ecuaţii diferenţiale.

Ecuaţiile diferenţiale cu argument modificat reprezintă o clasă specială de ecuaţii diferenţiale şi în cadrul acesteia, ecuaţiile diferenţiale cu modificări liniare ale argumentului ocupă un loc important. Multe probleme din astronomie, chimie, fizică, economie, inginerie, mecanică, ştiinţe sociale şi alte domenii conduc la probleme relative la ecuaţii diferenţiale cu argument modificat. Teoria ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat s-a dezvoltat foarte mult în ultimii 50 de ani. Problemele practice care au apărut, au condus la dezvoltarea teoriei în domeniu iar dezvoltarea teoriei a avut implicaţii asupra cercetărilor din diverse domenii aplicative.

Au apărut multe monografii în domeniul ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat, precum şi un foarte mare număr de lucrări ştiinţifice.

Ecuația pantografului
$$y'(x) = ay(\lambda x) + by(x), \ \ x > 0, \ \lambda > 0, \ \lambda \neq 1$$
şi generalizări ale acestei ecuații au fost studiate foarte mult, mai ales după anul 1971, când apare lucrarea lui Kato şi McLeod [2] (1971), deşi cazul particular al acestei ecuații
$$y'(x) = y(\lambda x), \ \ x > 0, \ 0 < \lambda < 1,$$
se întâlneşte pentru prima dată în lucrarea lui Mahler [3] (1940), în legătură cu o problemă de teoria numerelor.

Ecuația
$$y'(x) = y\left(\frac{x}{2}\right), \ \ x \geq 0$$
este menționată în [1] (1977), în legătură cu o problemă de teoria grafelor.

În această lucrare prezentăm ecuația pantografului precum şi alte modele matematice care conțin ecuații diferențiale cu modificare liniară a argumentului şi probleme relative la astfel de ecuații.

Folosind teoria operatorilor Picard obținem rezultate de existență şi unicitate precum şi rezultate de dependență de date pentru o problemă Cauchy considerată.

2. Ecuația pantografului şi alte modele matematice care conțin ecuații diferențiale cu modificare liniară a argumentului

Pantograful este un dispozitiv montat deasupra vehiculelor cu tracțiune electrică, servind ca priză electrică. Se referă mai ales la dinamica unui sistem colector de curent pentru o locomotivă electrică. Se pune problema de a determina mişcarea vârfului unui pantograf care colectează curent de la o rețea suspendată deasupra locomotivei.

Având în vedere aspecte privind fizica şi mecanica, după calcule şi aproximări, Ockendon şi Tayler în [6] (1971), arată că modelul matematic potrivit este un sistem format din patru ecuații diferențiale cu modificare liniară a argumentului, de forma:
$$Y'(x) = Ay(\lambda x) + By(x), \ \ x > 0, \ \ 0 < \lambda < 1,$$
unde A şi B sunt matrice constante, la care se impun condiții inițiale.

Această problemă a fost reluată de către Ockendon în lucrarea [5] (1980). În anul 1971 a apărut o lucrare de referință în domeniu [2], în care se studiază proprietățile asimptotice ale soluțiilor următoarei probleme:

$$y'(x) = ay(\lambda x) + by(x), \quad x > 0,\ \lambda > 0,\ \lambda \neq 1$$
$$y(0) = 1,$$
în cazul $0 < \lambda < 1$, respectiv $\lambda > 1$, unde $a, b \in \Re$.

Această lucrare a impulsionat cercetările în domeniu şi a determinat apariția unui număr mare de lucrări.

Amintim aici şi o problema din geometria curbelor care conduce la un model matematic ce conține o ecuație diferențială cu modificare liniară a argumentului.

Considerăm $(C): y = y(x),\ x \in I \subset \Re$ şi $M(x, y(x)) \in (C)$. Vrem să determinăm curbele $y = y(x)$ pentru care vectorul tangent în orice punct $M(x, y(x))$ este paralel cu vectorul determinat de $O(0,0)$ şi $P(1, y(\lambda x))$, unde $\lambda \in \Re$. Astfel, obținem următoarea ecuație cu modificare liniară a argumentului:
$$y'(x) = y(\lambda x),\ x \in I,\ \lambda \in \Re.$$

3. Noțiuni teoretice necesare

Fie (X, d) un spațiu metric şi $A : X \to X$ un operator. Notăm cu F_A mulțimea punctelor fixe pentru *A*, adică:
$$F_A = \{x \in X / A(x) = x\}.$$

Următorul rezultat este binecunoscut:

Teorema 3.1. (Principiul contracției)

Fie (X, d) un spațiu metric complet şi $A : X \to X$ astfel încât
$$d(A(x_1), A(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2),\ \forall\ x_1, x_2 \in X$$
unde $0 < \alpha < 1$.

Atunci:

(i) $F_A = \{x*\}$;

(ii) $\left(A^n(x_0)\right)_{n \in N}$ converge la $x*$ pentru orice $x_0 \in X$;

(iii) $d\left(x*, A^n(x_0)\right) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(x_0, A(x_0)\right),\ \forall\, n \in N$.

Prezentăm acum unele rezultate necesare din lucrarea [7].

Definiția 3.1. *A* este un operator Picard dacă există $x* \in X$, astfel încât:

1) $F_A = \{x*\}$;

2) şirul aproximaţiilor succesive $\left(A^n(x_0)\right)_{n\in N}$ converge la $x*$ pentru orice $x_0 \in X$.

Observaţia 3.1. Remarcăm faptul că dacă *X* este spaţiu metric complet şi $A: X \to X$ este o contracţie, atunci A este un operator Picard.

Teorema 3.2. (Teorema de dependenţă de date)

Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi operatorii $A,B: X \to X$, astfel încât:

(i) *A* este α - contracţie şi $F_A = \{x_A^*\}$;

(ii) *B* are puncte fixe şi $x_B^* \in F_B$;

(iii) există $\delta > 0$, astfel încât $d\left(A(x),B(x)\right) \le \delta,\ \forall\ x \in X$.

Atunci

$$d\left(x_A^*, x_B^*\right) \le \frac{\delta}{1-\alpha}.$$

4. Existenţă, unicitate şi dependenţă de date

Considerăm problema Cauchy

$$y'(x) = f\left(x, y(x),\ y(\lambda x)\right),\ x\in[0,b],\ 0<\lambda<1 \qquad (4.1)$$

$$y(0) = y_0, \qquad (4.2)$$

unde $f \in C\left([0,b]\times\Re\times\Re\right)$ şi $y_0 \in \Re$.

Problema (4.1)+(4.2) este echivalentă cu următoarea ecuaţie integrală:

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f\left(s, y(s), y(\lambda s)\right)ds,\ x \in [0,b],\ 0<\lambda<1.$$

Considerăm norma Bielecki $|\cdot|_B$ pe spaţiul $C[0,b]$, definită prin

$$|y|_B = \max_{x\in[0,b]}\left(|y(x)|e^{-\tau x}\right),\ \text{unde } \tau > 0.$$

Are loc

Teorema 4.1. Presupunem că au loc condiţiile:

(i) $f \in C\left([0,b]\times\Re\times\Re\right)$ şi $y_0 \in \Re$;

(ii) există $L_f > 0$, astfel încât

$$\left| f(x,u,v) - f(x,\bar{u},\bar{v}) \right| \le L_f \left(|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}| \right),$$

$\forall\ x \in [0,b]$ şi $u,\bar{u},v,\bar{v} \in \Re$.

Atunci problema (4.1)+(4.2) are în $C[0,b]$ o soluție unică y^* şi această soluție poate fi obținută prin metoda aproximațiilor succesive pornind de la orice element din $C[0,b]$.

Demonstrație. Considerăm operatorul

$A : \left(C[0,b], |\cdot|_B \right) \to \left(C[0,b], |\cdot|_B \right)$ definit prin

$$A(y)(x) := y_0 + \int_0^x f\left(s, y(s), y(\lambda s)\right) ds, \ x \in [0,b].$$

Obținem

$$\left| A(y)(x) - A(z)(x) \right| \le$$

$$\le L_f \left[\int_0^x |y(s) - z(s)| e^{-\tau s} e^{\tau s} ds + \int_0^x |y(\lambda s) - z(\lambda s)| e^{-\tau \lambda s} e^{\tau \lambda s} ds \right] \le$$

$$\le L_f \| y - z \|_B \left[\left(\frac{e^{\tau x}}{\tau} - 1 \right) + \left(\frac{e^{\tau \lambda x}}{\lambda \tau} - 1 \right) \right] \le L_f \frac{1 + \frac{1}{\lambda}}{\tau} \| y - z \|_B e^{\tau x}.$$

Rezultă că

$$\left| A(y)(x) - A(z)(x) \right| e^{-\tau x} \le L_f \frac{1 + \frac{1}{\lambda}}{\tau} \| y - z \|_B, \ \forall\ x \in [0,b] \qquad \text{şi}$$

$$\left\| A(y) - A(z) \right\|_B \le L_f \frac{1 + \frac{1}{\lambda}}{\tau} \| y - z \|_B, \ \forall\ y,z \in C[0,b].$$

Alegând τ suficient de mare avem că *A* este o contracție. Aplicând Principiul contracției, rezultă că A este operator Picard.

Acum considerăm următoarea problemă:

$$y'(x) = g\left(x, y(x), y(\lambda x)\right), \ x \in [0,b], \ 0 < \lambda < 1 \qquad (4.3)$$

$$y(0) = y_0, \qquad (4.4)$$

unde $g \in C\left([0,b] \times \Re \times \Re\right)$ şi $y_0 \in \Re$, este acelaşi ca în (4.1) şi (4.2).

Pentru această problemă, operatorul corespunzător este

$B : \left(C[0,b], |\cdot|_B \right) \to \left(C[0,b], |\cdot|_B \right)$, definit prin

$$B(y)(x) := y_0 + \int_0^x g(s, y(s), y(\lambda s))ds\,,\ x \in [0,b].$$

Avem

Teorema 4.2. Presupunem că:

(i) au loc condițiile din Teorema 4.1 şi $y*$ este soluția unică a problemei (4.1)+(4.2);

(ii) problema (4.3)+(4.4) are soluție şi $z*$ este o soluție a acestei probleme;

(iii) există $\eta > 0$, astfel încât

$$\left| f(x,u,v) - g(x,u,v) \right| \le \eta\,,\ \forall\ x \in [0,b]\ \text{ şi }\ u,v \in \Re.$$

Atunci, $$d(y*,z*) \le \frac{\eta b}{1-\alpha}\,,\ \text{unde}\ \ \alpha = L_f \frac{1+\frac{1}{\lambda}}{\tau}.$$

Demonstrație. Avem

$$\left\| A(y) - A(z) \right\|_B \le \eta b\,,\ \forall\ y \in C[0,b].$$

Aplicăm Teorema 3.2.

BIBLIOGRAFIE

[1] Harari, F., Palmer, E., *Teoria grafelor*, MIR, Moscova, 1977 (în limba rusă).

[2] Kato, T., McLeod, J.B., *Ecuația diferențial-funcțională* $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Bull. Amer. Math. Soc., 77, 6(1971), 891-937 (limba engleză).

[3] Mahler, K., *Asupra unei ecuații funcționale speciale*, J.London Math.Soc., 15(1940), 115-123.

[4] Mureşan, V., *Ecuații diferențiale cu modificare afină a argumentului*, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1997.

[5] Ockendon, J.R., *Ecuații diferențiale şi industria*, The Math. Scientist, 5(1980), no.1, 1.12 (limba engleză).

[6] Ockendon, J.R., Tayler, A.B., *Dinamica unui sistem colector de curent pentru o locomotivă electrică*, Proc. Roy. Soc. London, A 322(1971), 447-468 (limba engleză).

[7] Rus, I.A., *Operatori Picard şi aplicații*, Sc. Math. Japonicae, 58(2003), no.1, 191-229 (limba engleză).

Prof.Dr.matem. Viorica MUREŞAN
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
e-mail: vmuresan@math.utcluj.ro