A X-a Conferinţă Naţională multidisciplinară - cu participare internaţională,
"Profesorul Dorin PAVEL - fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2010

ASUPRA CALCULULUI ANALITIC AL FIABILITĂŢII

Liviu SUCIU, Mihaela SUCIU, Gavril BÂLC,
Marius GHEREŞ, Daniela PĂUNESCU, Victor ROŞ, Mircea BEJAN

SUR LE CALCUL ANALYTIQUE DE LA FIABILITE

Le travail présente une étude de synthèse sur le calcul analytique de la fiabilité. La fiabilité d'un objet, d'un élément, d'une composante ou d'un système est une fonction de temps F(t), définie comme ça: la probabilité qui, dans des conditions de l'environnement données et bien spécifiées, permets a l'objet de fonctionner adenter, en mentant les paramètres préétablis dans l'intervalle de temps (0, t). On a suivi l'algorithme de calcul de la fiabilité sur la base des certaines prémisses.

Cuvinte cheie: fiabilitate, funcţie de distribuţie a căderilor, densitate de probabilitate, buna funcţionare, timp de funcţionare fără defecţiuni

1. Introducere

Prin definiţie, fiabilitatea unui obiect, a unui element, a unei componente sau a unui sistem este o funcţie de timp F(t), definită astfel: *probabilitatea ca, în condiţii de mediu date şi bine specificate, obiectul să funcţioneze adecvat, menţinându-şi parametrii prestabiliţi, în intervalul de timp (0 ,t), fiind o probabilitate cuprinsă între 0 şi 1.*

La sistemele fără restabilire, adică nereparabile, pentru a le stabili fiabilitatea, este suficient să se ia în considerare durata scursă de la punerea în funcţiune până la defectarea sistemului, denumită şi "timp de funcționare fără defecțiuni", durată care este o variabilă aleatoare continuă.

2. Premise de calcul

Expresia analitică a fiabilității se obține pornind de la următoarele considerații:

- Fie un număr n_0 de elemente în stare de funcționare la timpul t = 0. La un moment oarecare t, înaintea unui interval care urmează după t, (t, t + Δt), mai sunt în stare de funcționare n elemente. Numărul de elemente care se defectează pe durata Δt este Δn. Considerând un factor de proporționalitate λ>0, constant, cu:

$$\Delta n = -\lambda \cdot n \cdot \Delta t \qquad (1)$$

Semnul «minus» arată că:

$$n - \Delta n < n \qquad (2)$$

adică, numărul de defectări nu poate să fie mai mare decât numărul de piese puse în funcțiune (figura 1).

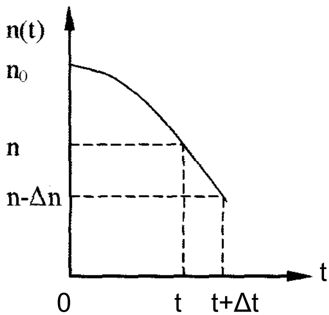

Fig. 1 Numărul căderilor în funcție de timp

3. Calculul analitic al fiabilității

Împărțind cu Δt şi trecând la limită se obține:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt} = -\lambda n, \qquad (3)$$

se obține ecuația diferențială:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n \tag{4}$$

a cărei soluție obținută prin integrare este:

$$\frac{dn}{n} = -\lambda dt \tag{5}$$

Integrând, se obține:

$$\int \frac{dn}{n} = -\lambda \int dt \tag{6}$$

de unde:

$$\ln n = -\lambda t + C \tag{7}$$

La momentul t = 0, n = n_0, deci:

$$\ln n_0 = C \tag{8}$$

De unde rezultă:

$$\ln n = -\lambda t + \ln n_0 \tag{9}$$

sau:

$$\ln n - \ln n_0 = -\lambda t \tag{10}$$

dar:

$$\ln n - \ln n_0 = \ln \frac{n}{n_0} \tag{11}$$

de aici:

$$\ln \frac{n}{n_0} = -\lambda t \tag{12}$$

adică:

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\lambda t} \tag{13}$$

Raportul $\frac{n}{n_0}$ reprezintă proporția (frecvența) de elemente în stare de funcționare la momentul t, adică fiabilitatea:

$$F(t)=R(t) = \frac{n}{n_0} = e^{-\lambda t} \tag{14}$$

Astfel, fiabilitatea R(t) reprezintă probabilitatea ca un element să funcționeze fără defectare în intervalul (0, t) în condiții determinate.

Relația (14) s-a obținut în ipoteza că λ = const.

În realitate, acest factor poate să varieze în timp şi atunci expresia (4) trebuie scrisă astfel:

$$\frac{dn}{dt} = -n\lambda(t), \qquad (15)$$

de unde rezultă expresia generală a fiabilității:

$$R(t) = \frac{n}{n_0} = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right] = e^{-\int_0^t \lambda t\,dt}, \qquad (16)$$

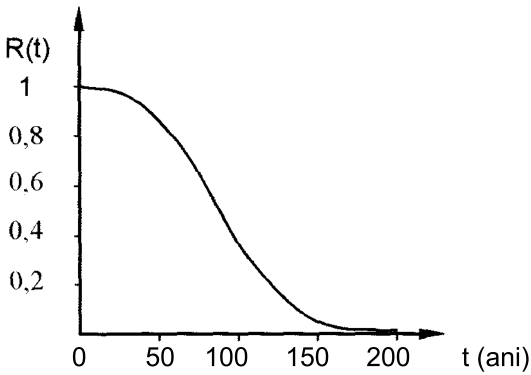

Fig. 2 Variația fiabiliății

Se observă că funcția fiabilității R(t) este de tip exponențial având, valorile extreme

$$R(0) = 1 \text{ şi } R(\infty) = 0,$$

În cazul în care λ are valori relativ constante, distribuția este dată de relația:

$$f(t) = -\frac{dF}{dt} = -\frac{de^{-\lambda t}}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (17)$$

Reprezentând grafic această funcție, se obține o curbă de tipul celei din figura 3, numită funcția densității căderilor sau funcția de distribuție a căderilor, în exprimare exponențială.

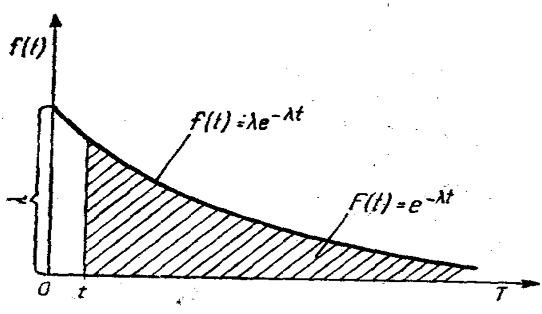

Fig. 3 Funcția densității căderilor sau funcția de distribuție a căderilor, în exprimare exponențială

Aria totală limitată de această curbă este egală cu 1.

4. Calculul statistic al fiabilității

În calculul statistic, funcția de distribuție a căderilor f(t) se mai numeşte şi frecvența relativă a căderilor $f(t_i)$ şi se calculează pentru fiecare interval de timp de observare cu ajutorul relației:

$$f(t_i) = \frac{n_{ci}}{N_0} \qquad (18)$$

unde:

- f(t) este frecvența relativă a căderilor în timpul t_i, raportată la numărul inițial al elementelor luate în studiu;
- n_{ci} este numărul căderilor produse în perioada t_i;
- N_0 este numărul inițial al elementelor luate în studiu;

Această relație se foloseşte în special pentru încercarea pieselor nereparabile (becuri, segmenți, rulmenți).

Aceste variabile aleatoare sunt caracterizate de obicei prin aşa numita "densitate de probabilitate", care este o funcție de timpul "t" şi de o mulțime de parametri θ_1, θ_2, …, θ_k, ce definesc corect funcția respectivă:

$$\begin{gathered} f(t;\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_i \ldots, \theta_k) \ge 0, \\ t \ge 0, \\ \theta_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \end{gathered} \qquad (19)$$

unde f(t), reprezintă limita raportului dintre probabilitatea de defectare în intervalul (t, t+dt) şi mărimea intervalului Δt, când $\Delta t \to 0$:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to o} \frac{P(t < T \le t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (20)$$

Valoarea teoretică a densității de probabilitate a timpului de funcționare se determină cu relația:

$$f(t, t + \Delta t) = \frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{\Delta t N} \quad (21)$$

unde:

- N reprezintă numărul total de produse; luate în studiu;
- N(t) este numărul de produse în stare de bună funcționare la momentul "t" al determinării

iar:

$$\int_0^{\infty} f(t; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) dt = 1 \quad (22)$$

Dacă se reprezintă grafic funcția:

$$y = f(t;\ \theta_i) \quad (23)$$

într-un sistem de axe rectangulare (t, y), se obține o curbă de tipul celei din figura 4. Valoarea integralei din formula (22), adică egală cu unitate, reprezintă chiar aria suprafeței haşurate, y = f(t).

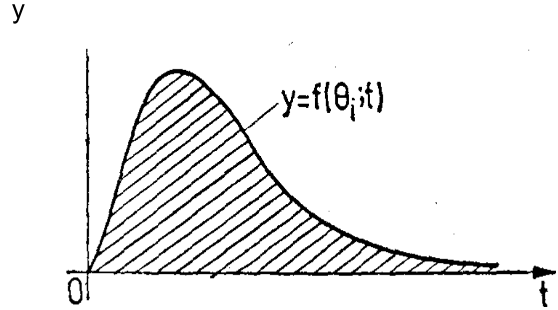

Fig. 4 Funcția densității de probabilitate

5. Funcția de repartiție a timpului de bună funcționare

Densitatea de probabilitate este legată de un indicator important al comportării în funcționare, funcția de repartiție a timpului de bună funcționare, $D(t;\theta_i)$, care este definită ca o probabilitate:

$$D\ (t\ ;\ \theta_i)\ \text{Prob}\{T < t\} \quad (24)$$

Funcția de repartiție a timpului de bună funcționare, poate fi privită ca "Funcție de nesiguranță", deoarece există relația evidentă:

$$\mathrm{Prob}\{T<t\}+\mathrm{Prob}\{T\geq t\}=1 \qquad (25)$$

adică, defecțiunea să apară la momentul T, în intervalul de timp în care se urmăreşte comportarea produsului. Valoarea teoretică a indicatorului, funcția de repartiție a timpului de bună funcționare, se determină cu relația:

$$D(t)=\frac{N-N(t)}{N} \qquad (26)$$

Funcția de fiabilitate R(t), adică R de la cuvântul englezesc "Reliability", echivalentul cuvântului fiabilitate în limba engleză, se defineşte ca fiind probabilitatea de funcționare a produsului fără defecțiuni în intervalul analizat:

$$R(t) = P(T>t), \qquad (27)$$

adică, defecțiunea să apară după expirarea timpului de supraveghere a produsului, indiferent de mărimea intervalului.

Valoarea teoretică a funcției de fiabilitate este dată de relația:

$$R(t)=\frac{N(t)}{N} \qquad (28)$$

6. Concluzii

■ Întrucât fiabilitatea este măsura şansei unui produs de a-şi îndeplinii funcțiile, într-un anumit interval de timp dat, este necesară introducerea timpului ca element de condiționare în estimarea fiabilității.

■ Similar timpului, în anumite situații se poate lua, ca unitate de măsură pentru estimarea fiabilității, o anumită prestație a produsului.

BIBLIOGRAFIE

[1] Baron, T., *Calitatea şi fiabilitatea produselor,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
[2] Bejan, M., *În lumea unităților de măsură,* ediția a doua, revăzută şi adăugită, Editura Academiei Române şi Editura AGIR, Bucureşti. 2005.

[3] Enrick, N.L., *Quality Control and Reliability*, (sixth edition), Industrial Press Inc., New York, 1972.
[4] Ionut, B., s. a., *Mentenanță, mentenabilitate, tribologie şi fiabilitate,* Editura Sincron, Cluj-Napoca, 2003.
[5] Nanu, A., *Tehnologia materialelor,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.
[6] Panaite, V., Popescu, M.O., *Calitatea produselor şi fiabilitate*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2003.
[7] Villemeur, A., *Reliability, Availability, Maintainability and Safety Assessment,* Ed. John Wilei & Sons, Lanarkshire, 1991.

Drd. Ing. Liviu SUCIU,
Dir. Adm., Facultatea de Construcții, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Prof.Dr.Ing. Mihaela SUCIU,
Prof.Dr.Ing. Gavril BÂLC,
Conf.Dr.Ing. Marius GHEREŞ,
Facultatea de Mecanică, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Conf.Dr.Ing. Daniela PĂUNESCU
Facultatea de Construcții de Maşini, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Prof.Dr.Ing. Victor ROŞ,
Prof.Dr.Ing. Mircea BEJAN,
Facultatea de Mecanică, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
membri AGIR