A XI-a Conferință Națională multidisciplinară – cu participare internațională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2011

TEHNICI DE ANALIZĂ ÎN MECANICA SISTEMELOR COMPLEXE UTILIZÂND TEORIA HAOSULUI

George MAHALU, Radu PENTIUC, Cornel TURCU, Valentin POPA

ANALYTICAL TECHNIQUE SOFCOMPLEX MECHANICAL SYSTEMS USING CHAOSTHEORY

This paper presents the approach to the development of a system described chaotic behavior characterized by using baker's transformation. There are detailed rules on the introduction of specific concepts such as Lyapunov coefficient and prediction horizon. There are also examples of the use of charts and baker's diagrams description to the attractor for the logistic equation.

Keywords: baker's transformation, Lyapunov coefficient, prediction horizon, entropic system
Cuvinte cheie: transformarea brutarului, coeficient Lyapunov, orizont predictiv, sistem entropic

1. Introducere

În abordarea sistemelor complexe cu comportare dinamică haotică, sunt implicate funcții evolutive entropice şi implicit săgeata timpului. Astfel de probleme, cel puțin din punct de vedere filosofic, au reprezentat – şi continuă să reprezinte – marcheri în dezvoltarea umană, atât la nivel cultural cât şi la nivel social.

Deoarece tratarea sistemelor complexe constituie încă o problemă spinoasă, instrumentele de modelare fiind reduse ca număr şi aflate într-o fază incipientă de dezvoltare şi rodare, orice idee de abordare a unui astfel de demers este binevenită.

Sistemele complexe cu comportament haotic sunt sensibile la modificarea fină a condițiilor inițiale [1], fapt care conduce la existența unui orizont de predictibilitate limitat şi a unor manifestări tipice, caracterizate uneori de manifestări ce implică prezența haosului şi a comportamentului fractal.

2. Transformarea brutarului

Transformarea brutarului (baker transform) constituie o modalitate eficientă de studiu comportamental al unui sistem dinamic prezentând evoluție haotică, prin proprietățile implicate de suita stărilor discrete ce se succed de-a lungul săgeții timpului - definită în mod natural pentru un astfel de sistem.

Din punctul de vedere al teoriei sistemelor dinamice, o hartă "baker" este o transformare unitară ce modifică un domeniu pătrat în el însuşi. Denumirea derivă din tehnica utilizată de brutar în prepararea aluatului, folosind pentru aceasta procedee de întindere după o direcție şi de compresie după o altă direcție.

Transformarea brutarului poate fi înțeleasă ca fiind rezultatul aplicării unui operator de deplasare bilaterală. Din acest motiv, în cadrul proceselor fizice de difuzie se pot utiliza în modelare lanțuri de transformări "baker". Transformarea brutarului constituie un bun exemplu de metodă exactă de rezolvare a problemelor definite prin modele de haos deterministic, caz în care vectorii şi valorile proprii ai operatorului de transformare pot fi determinați în mod explicit [2].

Există multiple versiuni ale transformării brutarului, în acest articol făcându-se referire la cea mai comună dintre acestea. Este vorba de transformarea simplă, fără fălduire, adică fără implicarea rotațiilor, forfecărilor, scalărilor etc., ci doar a translațiilor. În felul acesta, vom considera operația de transformare ca rezultând din compunerea a patru transformări simple: extensia cu factor 2 după direcția orizontală, compresia cu factor 1/2 după direcția verticală, secționarea pe mijloc după direcția verticală şi translarea jumătății drepte deasupra jumătății stângi. În felul acesta domeniul pătratului de latură unitate este refăcut [3].

Simularea sistemelor cu orizont predictiv Lyapunov necesită considerarea unor modele neliniare, sensibile la condițiile inițiale şi prezentând tendințe către atractori fractali. Contrar impresiei generale, astfel de condiții sunt deseori îndeplinite de sisteme a căror modele sunt extrem de simple.

Fie transformarea:

$$T : [0,1) \to [0,1)$$

definită astfel:

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \dfrac{y}{2}\right) & \text{pt. } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \left(2x-1, \dfrac{1+y}{2}\right) & \text{pt. } \dfrac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

Se observă că această funcție transformă un domeniu pătrat de latură unitate în el însuşi. În plus, transformarea presupune o extensie de factor 2 după direcția orizontală şi o compresie de factor 1/2 după direcția verticală. În felul acesta, se pot defini doi coeficienți Lyapunov pentru sistemul considerat, notați λ_1 şi respectiv λ_2, cu $\lambda_1 > \lambda_2$. Deoarece primul coeficient este supraunitar iar cel de-al doilea este subunitar, procesele modelate de evoluția sistemului după direcția orizontală vor fi caracterizate prin haos. Astfel, dincolo de orizontul Lyapunov dat prin $e^{\lambda_1 t}$, comportarea sistemului modelat devine impredictibilă.

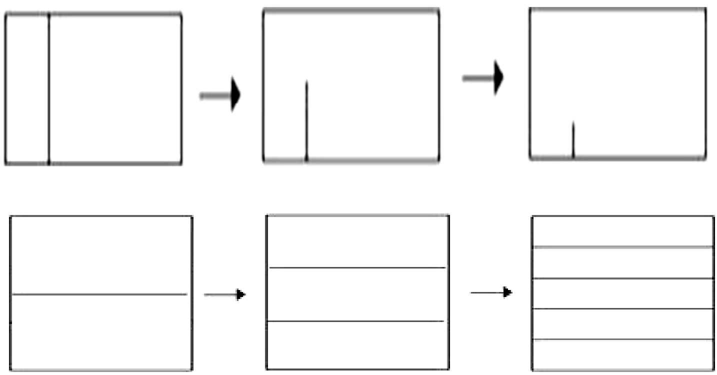

Fig. 1 Secvențe de transformări "baker"

3. Ecuația logistică şi atractorii starnii

Pentru a exemplifica cele specificate, vom considera un caz simplu de model sistemic rezultat în urma aplicării succesive a unui set de transformări "baker". În figura 1 sunt prezentate două procese distincte. Primul presupune o compresie datorată existenței unui coeficient Lyapunov subunitar, cel de-al doilea o extensie ca urmare a influenței unui coeficient Lyapunov supraunitar. Celor două comportări li se pot asocia cele două clase de evoluții sistemice relative la axa timpului: sistemele evoluând dinspre viitor spre trecut şi respectiv sistemele evoluând din trecut către viitor. Prima clasă comportamentală defineşte caracterul deflaționist al sistemului, în timp ce cea de-a doua face referire la caracterul inflaționist. Caracterul deflaționist prezintă tendințe către traiectorii clasice, în timp ce caracterul inflaționist duce sistemul spre atractori stranii [4].

Fie sistemul a cărui evoluție este definită de ecuația diferențială neliniară:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x) \tag{2}$$

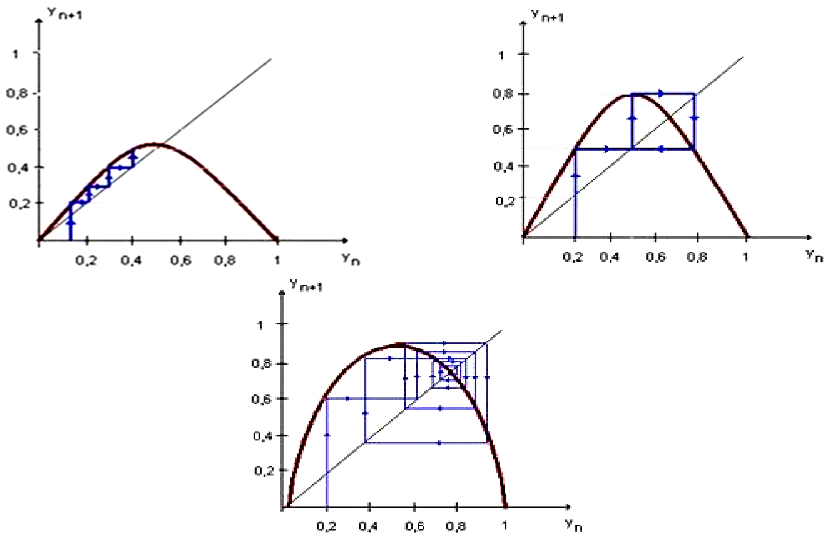

Fig. 2 Diagramele ecuației logistice
pentru r luând valorile 1,8, 3,4, 3,7

Această ecuație, prin discretizare, devine:

$$x_{k+1} = rx_k\,(1 - x_k) \tag{3}$$

Se constată că ecuația logistică este o ecuație iterativă polinomială de grad doi.

Ea constituie unul dintre exemplele tipice de ecuație neliniară simplă cu o comportare haotică.

Ea a fost pentru prima dată prezentată într-un articol al biologului Robert Mayer, referitor la analiza unui model demografic de timp discret bazat pe un studiu anterior al lui Pierre François Verhulst.

Impunând $x_k \in (0,1)$ şi $r \in (0,4)$ se constată o serie de comportări neaşteptate. Pentru r luând valorile 1,8, 3,4 şi 3,7, se pot trasa graficele din figura 2.

În cazul r = 3,7 comportarea sistemului devine complet impredictibilă pe termen lung.

Analizând modul în care apar tendințele spre haos, se constată că multe sisteme descriptibile iterativ pot căpăta astfel de comportări.

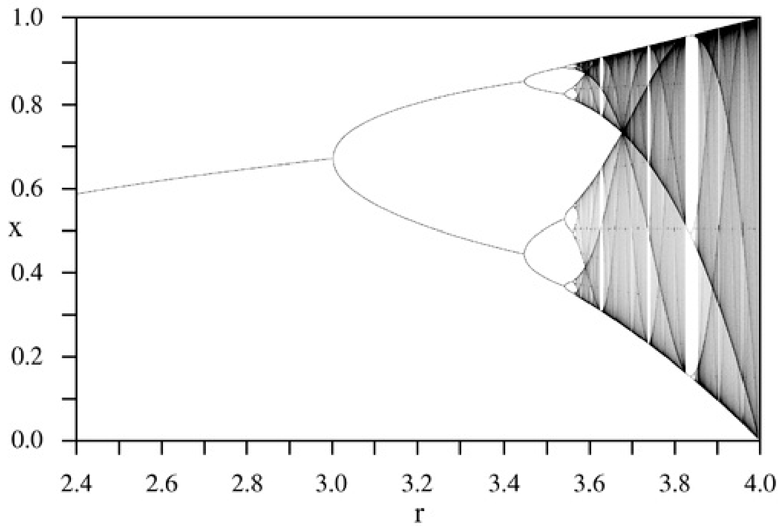

Fig. 3 Filmul ecuației logistice

În figura 3 este prezentat filmul ecuației logistice. Se constată că dincolo de r = 3 ecuația capătă un caracter specific sistemelor instabile.

Comportamentul devine complet haotic după r ≈ 3,5, un fapt total neaşteptat în teoriile clasice ale sistemelor dinamice.

4. Concluzii

■ În studiul sistemelor complexe se face apel la setul de coeficienți Lyapunov prin intermediul cărora se poate realiza o analiză evolutivă fără necesitatea introducerii noțiunii de traiectorie de stare, aşa cum este aceasta definită în mod clasic.

■ Problema entropiei unui sistem complex şi a prezenței săgeții timpului în comportarea evolutivă a acestuia, este o chestiune larg utilizată de către cercetătorii actuali.

Notă: Această lucrare a beneficiat de suport financiar prin proiectul "Progres şi dezvoltare prin cercetare şi inovare post-doctorală în inginerie şi ştiințe aplicate – PriDE – Contract nr. POSDRU/89/1.5/S/57083", proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ott, Ed., *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge CB2-2RU, UK, 2002.
[2] Erdi, P., *Complexity Explained*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
[3] Cvitanoviç, Pr., ş.a., *Chaos Book*, v. 11.8, August 2006.
[4] Coulhon, Th., Koskela, P., *Geometric interpretations of Lp-Poincaréinequalities on graphs with polynomial volume growth*, Research through the European Commission (IHP Network "Harmonic Analysis and Related Problems" 2002-2006, Contract HPRN-CT-2001-00273-HARP).

Conf.Dr.Ing. George MAHALU,
Prof.Dr.Ing. Radu PENTIUC
Prof.Dr.Ing. Cornel TURCU
Prof.Dr.Ing. Valentin POPA
Universitatea "Ştefan cel Mare" Suceava
membri AGIR
e-mail: mahalu@eed.usv.ro