A XI-a Conferință Națională multidisciplinară – cu participare internațională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii românești",
SEBEȘ, 2011

E,G ŞI υ - CARACTERISTICI ELASTICE ALE MATERIALELOR

Augustin CREȚU, Rodica CREȚ, Dănuț MATEESCU

E, G ET υ - CARACTÉRISTIQUES ÉLASTIQUES DES MATÉRIAUX

On présente les contributions fondamentales des scientifiques – mathématiciens et mécaniciens – au développement de la Résistance des Matériaux et de la Théorie de l'Élasticité. T. Young, Ch. A. de Coulomb et S.D. Poisson ont lié leurs noms – entre autres – aux paramètres qui définissent les caractéristiques élastiques des matériaux: les modules d'élasticité (E et G) et le coefficient de contraction transversale (υ). On souligne le fait que sans connaître le plus exactement possible les valeurs de ces constantes, il devient pratiquement impensable de concevoir et de réaliser rationnellement les diverses structures mécaniques modernes.

Mots-clés: applications, barres, poutres, ressorts, plaques, le stress, la tension, modules élastiques: longitudinale et transversale contraction transversale coefficient, la conception rationnelle

Cuvinte cheie: solicitări, bare, grinzi, resorturi, plăci, tensiuni, deformații, module de elasticitate: longitudinală şi transversală, coeficient de contracție transversală, proiectare rațională

1. Precursori [1, 3, 4]

Celui mai mare savant al sfârşitului secolului al XVII-lea, sir ***Isaac Newton*** – genial matematician, fizician şi astronom, profesor universitar la Cambridge – îi este atribuită o faimoasă afirmație „*Noi suntem nişte pitici urcați pe umerii unor giganți"*, consfințind, astfel, un

îndreptățit omagiu adus înaintaşilor fondatori ai ştiințelor moderne. El însuşi – una dintre figurile cele mai mărețe ale epocii şi ale întregii istorii a cunoaşterii - s-a ocupat în mod special de Mecanică - ale cărei legi fundamentale le-a stabilit – a pus temeliile „mecanicii clasice", dând soluții multor probleme din sferele matematicii, fizicii şi astronomiei. Tratatul său *„Philosophiae naturalis principia mathematica"* (Principiile matematice ale filosofiei naturale) – apărut la 5 iulie 1687, reeditat în mai multe limbi şi numeroase ediții – constituie baza astronomiei, fizicii şi mecanicii clasice. Această lucrare era socotită, mai târziu – de către ***Joseph Louis Lagrange*** – *„... cea mai mare creație a minții omeneşti"!*

O figură aparte printre savanții vremii – fizicianul, *mecanicianul, matematicianul, astronomul şi naturalistul englez* ***Robert*** **Hooke**, profesor de geometrie la Colegiul Gresham şi membru de vază al Royal Society (unde era responsabilul experimentelor) – *„la bête noire"* pentru ***I. Newton*****,** cu care s-a aflat într-o ... vrajbă înverşunată şi de lungă durată – era preocupat, în principal, de problemele concrete ale vieții cotidiene. Ca urmare, importante – şi nu puține – au fost rezultatele cercetărilor întreprinse de acesta, în diverse domenii. El este - în anul 1658 – inventatorul arcului spiral, aplicat la realizarea unor ceasuri portabile. Mai târziu – în anul 1674, la Londra, în lucrarea sa *„An attempt to prove the annual motion of the Earth"* (Încercare de a dovedi mişcarea anuală a pământului) şi-a expus o ipoteză embrionară, bazată pe observații, asupra gravitației universale – fără a putea demonstra legile lui ***Kepler*****.** Abordând, empiric, studiul efectului aplicării forțelor asupra corpurilor – confecționate, la scară macroscopică, din diferite materiale – a strâns o mare varietate de fire, resorturi şi bare din lemn pe care le-a supus tracțiunii progresive, adăugând greutăți marcate (forțe) pe platanul unei balanțe şi măsurând deplasările (deformațiile) corespunzătoare. Reprezentând grafic deformațiile înregistrate în funcție de forța aplicată elementelor încărcate, a obținut – de fiecare dată – o dreaptă, după îndepărtarea forței, corpurile revenindu-şi la starea inițială (adică, în domeniul elastic)!

În anul 1676 – pentru a-şi asigura prioritatea şi, poate, pentru a-l irita pe ***I. Newton*** (care, în acelaşi an, procedase cam la fel cu ***G.W. Leibniz****!)* – publică fascicula intitulată *„A decimate of the centesme of the inventions/intended to publish"* (O zecime din cele o sută de invenții pe care intenționam să le public), care cuprinde şi capitolul *„The true theorie of elasticity or springiness"* (Adevărata teorie a elasticității sau efectul resortului), urmat de *anagrama* ***«ceiiinossssttuv»***!

Mai apoi, în anul 1678, ***Hooke*** a relevat semnificația ascunsă a acestei anagrame în lucrarea sa *„De potentia restitutiva or of spring*"

(Restituirea puterii sau despre arc), unde enunță legea care avea să-i poarte numele – constituind baza dezvoltării ulterioare a Rezistenței Materialelor şi a Teoriei elasticității: ”***Ut tensio, sic vis” („Telle extension, telle force”)*** sau ***„Precum este deformația (de mare), aşa este şi forța (care o provoacă)”!***

Pentru marea majoritate a materialelor izotrope, în cazul solicitării monoaxiale, în domeniul elastic al unui corp izotrop, deformația în direcția tensiunii este direct proporțională cu tensiunea, cele două mărimi aflându-se într-o relație liniară, stabilită experimental, de forma

$$\varepsilon = \alpha\sigma \ , \qquad (1)$$

unde α este un coeficient dependent de materialul, forma şi dimensiunile corpului. Astfel de relații de proporționalitate pot fi scrise şi între lunecări (deplasări unghiulare) şi sarcinile care le produc, respectiv, între rotiri şi cuplurile care le cauzează.

2. Thomas YOUNG (Milverton, 13.06.1773 – Londra, 10.05.1829) – modulul de elasticitate longitudinală, E [4, 5, 7]

După o temeinică pregătire în domeniul medicinei (între 1792 şi 1796) la Londra, Edinburg şi Götingen – este admis (în 1797) ca bursier la Colegiul Emmanuel din Cambridge, unde studiază sunetele şi lumina (1799). În anul 1801 redescoperă fenomenul interferenței luminii (pus în evidență de către Francesco-Maria Grimaldi încă din secolul al XVII-lea, în 1665, într-o lucrare postumă a fizicianului italian – dar neluat în serios, la acea vreme) iar în 1802 este ales membru al Royal Society fiind, totodată, profesor de filosofie naturală în cadrul Royal Institution. Activitatea sa de lector în cadrul Royal Institution a reprezentat un eşec, cursurile sale fiind prea concise, el simținindu-se incapabil să insiste asupra acelor părți care implicau un volum mare de calcule, probabil spre a evita dificultățile. Peste numai un an renunță la cariera didactică spre a se dedica redactării operei sale ştiințifice.

În anul 1807 a publicat, la Londra – în două volume – „*A Course of Lectures on Natural Philosophy and Mechanical Arts”* în care descrie principalele moduri de deformare a barelor prismatice, introducând – pentru prima oară – noțiunea de ***modul de elasticitate la tracțiune şi la compresiune***, E. Definiția acestei mărimi diferă, însă, de cea folosită în prezent pentru ***modulul lui Young***. Astfel, el afirmă că *„modulul de elasticitate al oricărei substanțe poate fi asimilat unei coloane din aceeaşi substanță, capabilă de a produce în suprafața*

(aria) bazei sale o presiune care se află în acelaşi raport față de greutatea ce produce compresiunea, ca şi lungimea față de scurtarea sa". Se observă că el vorbeşte despre greutatea modulului şi de înălțimea acestuia – despre care susține că este independentă de aria secțiunii transversale. Pe de altă parte, greutatea modulului ar fi egală cu produsul dintre mărimea pe care o numim acum ***modulul lui Young*** şi aria secțiunii transversale a barei. Pornind de la încercările diverselor materiale la tracțiune şi la compresiune, ***Young*** a observat că, întotdeauna, deformațiile longitudinale ale epruvetelor sunt însoțite de modificarea dimensiunilor transversale iar legea lui Hooke este valabilă numai în domeniul elastic de solicitare.

Young a făcut, totodată, observații importante privind legătura dintre forțele tăietoare şi deformațiile unghiulare pe care acestea le provoacă, respectiv, dintre momentele de torsiune şi tensiunile tangențiale rezultate în barele cu secțiune circulară supuse răsucirii.

El are remarci importante legate de încovoierea grinzilor, de modul de deformare a acestora precum şi referiri la solicitarea la compresiune excentrică a stâlpilor de secțiune dreptunghiulară şi a celor cu secțiune variabilă (de diferite forme). A fost un precursor în ceea ce priveşte analiza tensiunilor şi a doformațiilor rezultate ca urmare a solicitării prin şoc, la încovoiere, ajungând la concluzia că energia acumulată de grindă este proporțională cu volumul acesteia.

Preocupările sale nu s-au rezumat doar la tratarea unor probleme pur ştiințifice ci a atacat şi chestiuni practice, inginereşti. Un exemplu în acest sens îl reprezintă un raport prezentat conducerii Amiralității cuprinzând unele considerații asupra construcțiilor de nave. Considerând corpul navei ca o grindă, în ipoteza unei anume distribuții a greutăților pe lungime şi un anumit profil al valurilor, a calculat forțele tăietoare şi momentele încovoietoare în diferite secțiuni ale acesteia, determinându-i şi linia elastică.

Chiar dacă unele capitole din lucrările sale au apărut sub o formă neatractivă – fiind dificil de citit – acestea conțin soluții valide ale multor probleme importante de Rezistența Materialelor, complet noi la acea vreme. Partea de Mecanica Materialelor din al doilea volum al *„Natural Philosophy"* nu a stârnit mare interes din partea inginerilor întrucât prezentarea autorului era de cele mai multe ori *„telegrafică şi arareori clară"*. El a fost un precursor în privința analizei tensiunilor produse prin şoc elaborând şi o metodă de calcul a acestora, în cazul materialelor perfect elastice, care ascultă de legea lui **Hooke** până la rupere.

Thomas Young a contribuit substanțial la dezvoltarea Rezistenței Materialelor şi a Teoriei Elasticității prin introducerea noțiunii de *modul de elesticitate -E- la tracțiune şi la compresiune*.

În accepțiunea modernă, E reprezintă o mărime constantă a rigidității materialului, care nu depinde de tensiuni sau de deformații. Cu cât modulul de elasticitate longitudinală este mai mare cu atât deformațiile corespunzătoare aceleiaşi tensiuni sunt mai mici, iar *legea lui Hooke* (1) ia forma (2):

$$\varepsilon = \sigma / E \qquad (2)$$

3. Charles-Augustin de COULOMB (Angoulême, 14.06.1736 – Paris, 23.08.1806) – modulul de elasticitate transversală, G [2, 5, 7]

Născut la Angoulême, în departamentul Charente, în anul 1736, marele fizician şi mecanician ***Charles – Augustin de Coulomb*** şi-a desăvârşit educația la Paris, înainte de a fi primit în corpul inginerilor militari.

Trimis în insula Martinica – însărcinat (timp de 9 ani) cu diverse lucrări de construcții – s-a dedicat studiului proprietăților mecanice ale materialelor şi diverselor probleme de ingineria structurilor.

În lucrarea *„Sur un application des regles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatif à l`architecture*" - prezentată în anul 1773 Academiei Franceze de Ştiințe – sunt expuse o bună parte din rezultatele studiilor sale.

Întors în Franța, Coulomb a lucrat ca inginer în la Rochelle şi Cherbourg iar în anul 1781 este câştigătorul premiului Academiei pentru memoriul *"Théorie des machines simples*", în care-şi prezintă rezultatele experiențelor sale, privitoare la frecarea reciprocă, unsă sau uscată, prin alunecare sau prin rostogolire.

Din 1781 s-a stabilit definitiv la Paris, unde fusese ales membru al Academiei şi unde avea condiții mai bune pentru munca ştiințifică.

În anul 1784 apare lucrarea sa *„Recherches théoriques et experimentales sur la force de torsion et sur l`élasticité de fils de metal"*, în care determină rigiditatea la răsucire a unei sârme, utilizând oscilațiile torsionale ale unui cilindru metalic suspendat la capătul său. Reorientându-şi preocupările spre cercetări în domeniul electricității şi a magnetismului, Coulomb a conceput şi realizat (în 1785) o balanță de torsiune – foarte sensibilă, cu ajutorul căreia a stabilit legea atracției dintre două sarcini electrice sferice (care-i poartă numele) – valabilă şi în magnetostatică.

Izbucnirea revoluției franceze din 1789 îl determină să se retragă la o proprietate a sa de la Blois iar în 1793 Academia a fost închisă redeschizându-se în 1795 sub un nou nume *"L`Institut National des Sciences et des Artes"*, aflându-se printre primii noi membri ai acestuia şi publicându-şi ultimele lucrări în „*Memoirs de l`Institut*".

În anul 1802 Coulomb a fost numit unul dintre inspectorii generali de studii, dedicându-şi, în ultimii patru ani ai vieții, o mare parte din energie îmbunătățirii educației publice.

În lucrarea sa „*Sur une Aplication...*" - menționată anterior – sunt expuse rezultatele experimentelor sale de stabilire a rezistenței unor tipuri de gresii la tracțiune, forfecare şi încovoiere. În aceeaşi lucrare analizează încovoierea grinzilor observând că în cazul unei grinzi în consolă, având secțiune dreptunghiulară, fibrele superioare sunt întinse iar cele inferioare sunt comprimate. Tot el notează faptul că dacă raportul dintre înălțimea grinzii şi deschiderea acesteia, h/ℓ, este mic, în cazul încovoierii, efectul forței tăietoare asupra mărimii tensiunilor este neglijabil.

Studiind comprimarea axială a unei prisme, stabileşte că ruperea acesteia se produce prin lunecarea într-un anumit plan a celor două părți componente, atunci când este depăşită rezistența la forfecare în acel plan. Pe baza experimentelor sale, constatând că fisurile care preced ruperea apar după direcții la 45^0 față de axa epruvetei, a emis, în 1773, teoria - reformulată, ulterior, de către H.E. Tresca şi confirmată experimental de J. Bauschinger, A. Föppl şi J. Guest (a treia - de rezistență) - conform căreia starea periculoasă apare în corpul supus stării spațiale de tensiuni, atunci când tensiunea tangențială maximă din acel corp $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ atinge valoarea tensiunii tangențiale corespunzătoare stării limită de la solicitarea de tracțiune simplă $\tau_{max\ t} = \sigma_e / 2$, adică:

$$\sigma_{ech.III} = \sigma_1 - \sigma_2 \qquad (3)$$

Ca urmare a cercetărilor sale experimentale, a stabilit, pentru fiecare material încercat, valoarea limitei de elasticitate la răsucire, observând că dacă sârma este inițial răsucită peste această limită materialul acesteia se întăreşte iar valoarea limitei de elasticitate creşte. Totodată, a dedus – pentru unghiuri mici – proporționalitatea dintre momentul de torsiune, M_t – respectiv, τ şi unghiul de răsucire corespunzător, $\Delta\phi$ – respectiv, deformația specifică unghiulară, γ, adică:

$$\gamma = \tau / G . \qquad (4)$$

De asemenea, a demonstrat experimental că amortizarea oscilațiilor torsionale se datorează nu rezistenței aerului ci unor imperfecțiuni de material. Studiind influența unor tratamente termice asupra proprietăților mecanice ale materialelor, a afirmat că acestea trebuie definite prin două mărimi: coeficentul de contracție transversală, υ şi limita de elasticitate, $\sigma_e\left(\tau_e\right)$.

Rodnica activitate ştiințifică desfăşurată de C.A.Coulomb a rămas consemnată, în principal, prin importantele sale contribuții în electricitate şi magnetism, ca inventator al balanței de torsiune. Totodată, el a formulat legile frecării uscate şi a efectuat numeroase studii experimentale privitoare la rezistența materialelor, de numele său fiind legată şi noțiunea de *modul de elasticitate transversală – G*.

Nici un alt om de ştiință al secolului al XVIII-lea n-a contribuit mai mult decât Coulomb la progresul ştiințific al mecanicii mediilor elastice!

4. Siméon-Denis POISSON (Pithiviers, 21.06.1781-Paris, 25.04.1840) – coeficientul de contracție transversală, ν [5, 6, 7]

Născut la Pithiviers – lângă Paris, într-o familie săracă – Poisson n-a avut posibilitatea să învețe, până la vârsta de 15 ani, decât scrisul şi cititul. Trimis, în 1796, la unchiul său – la Fontainebleau – unde a luat lecții de matematici, a dovedit o atât de mare atracție înspre ştiințele exacte încât, peste numai doi ani – în 1798 – reuşeşte – cu distincție – la École Polytechnique, înființată în 1794. Acolo este remarcat, datorită progreselor înregistrate, de către ***Lagrange*** şi ***Laplace*** astfel încât, la absolvire, în 1800, este reținut în cadrul catedrei de matematici. În 1806 devine titular al cursului de calcul şi analiză matematică la Politehnica din Paris iar, ulterior, al catedrei de mecanică rațională de la Sorbona.

În anul 1811 apare prima ediție a lucrării lui *Poisson „Traité de Mécanique”* – operă cu mare răsunet în lumea ştiințifică a vremii, devenită, ulterior, manual de bază în studiul mecanicii, deschizându-i autorului drumul spre Academia de Ştiințe din Paris.

Următoarea ediție a *Tratatului de Mecanică* – apărută în 1833, în două volume – include şi rezultatele contribuțiilor publicate de el în 1829 în *„Mémoire sur l`équilibre et le mouvement des corps élastique*”, în 1830 în „*Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieaux élastiques”* şi în 1831 în *„Mémoire sur les équations générales de l`équilibre et du mouvement des corps élastiques* et des *fluides*”. În

aceste memorii, Poisson a introdus, pentru prima oară, noțiunea de *contracție laterală (transversală*). Astfel, în cazul întinderii monoaxiale, experiențele arată că are loc – în domeniul elastic – o micşorare a dimensiunilor transversale, fenomen denumit contracție transversală iar *deformația specifică transversală* – în funcție de cea longitudinală – va fi

$$\varepsilon_t = -\upsilon\varepsilon\,, \tag{5}$$

unde *coeficientul de contracție transversală,* ν - pentru multe materiale omogene şi izotrope are valori, stabilite teoretic, egale cu 0,25 – după *Poisson* – sau de 0,33 – conform determinărilor experimentale efectuate de *W. Wertheim* şi *Cognard de la Tour*. În cazul barei prismatice solicitate axial, față de un sistem de referință cartezian, Oxyz, deformația specifică de volum devine:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x\left(1-2\upsilon\right)\rangle 0 \quad \text{şi} \quad \upsilon\langle 0{,}5 \tag{6}$$

În acelaşi *Tratat de Mecanică* (din 1883) – derivând ecuația diferențială a fibrei medii deformate a unei grinzi încovoiate şi ținând seama de relațiile diferențiale dintre eforturi – stabileşte, pentru calculul deformațiilor şi vibrațiilor, propriile sale ecuații de forma:

$$d^4y/dx^4 = -\frac{1}{EI_z}\frac{dT(x)}{dx} = q/EI_z\,, \tag{7}$$

unde pentru intensitatea sarcinii – q - propune o exprimare cu serii trigonometrice, sub o formă sinusoidală.

El deduce şi ecuația diferențială, de ordinul patru, a plăcilor, în coordonate carteziene, pe care – pentru cele circulare- o rescrie, în coordonate polare, dând o soluție completă problemei. Todată, a studiat şi vibrațiile laterale ale plăcilor şi a stabilit ecuațiile vibrațiilor longitudinale, torsionale şi laterale ale barelor, calculând frecvențele diferitelor moduri de vibrații.

Marele matematician şi mecanician francez ***Siméon – Denis Poisson***, profesor la Şcoala Politehnică din Paris, apoi, titular al catedrei de mecanică rațională de la Sorbona şi membru al Academiei de Ştiințe din Paris, a adus contribuții fundamentale în domeniul ecuațiilor cu derivate parțiale, a calculului variațional şi a funcțiilor armonice. Lucrarea sa *„Traité de Mécanique*”- operă esențială în domeniu – cuprinde principalele sale contribuții privind echilibrul şi mişcarea corpurilor elastice, propagarea mişcării în mediile elastice şi

ecuațiile generale ale echilibrului şi mişcării corpurilor elastice şi a fluidelor. În Rezistența Materialelor şi în Teoria Elasticității numele său rămâne ataşat de soluționarea numeroaselor probleme analitice precum şi de introducerea noțiunii de *coeficient de contracție transversală* - ν.

5. Concluzii

■ Faimoasa frază atribuită celui mai mare savant al secolului al XVII-lea Isaac Newton, aducând, astfel, un omagiu îndreptățit înaintaşilor fondatori ai ştiințelor moderne, se potriveşte întocmai, şi continuatorilor în privința cercetărilor ştiințifice din veacurile ce au urmat. Făcând referire doar la câteva dintre realizările în domeniul Rezistenței Materialelor şi al Teoriei Elasticității, numele fondatorilor - Young, Coulomb şi Poisson - rămân legate şi de *introducerea şi definirea constantelor elastice E, G, şi* ν - trei parametri independenți, legați între ei prin *condiția de continuitate a corpului omogen şi izotrop* solicitat, supus deformării:

$$G = E / 2(1+\upsilon) \tag{8}$$

■ Modulul de elasticitate longitudinală, E, modulul de elasticitate transversală, G şi coeficientul de contracție transversală, ν caracterizează proprietățile elastice ale corpului izotrop şi se determină experimental.

■ În cazul materialelor neomogene sau anizotrope, valorile constantelor elastice variază în funcție de structură şi de coordonatele punctului de referință din corp. Acelaşi lucru se constată, pentru modulele de elasticitate, atunci când metalele sunt supuse unor tratamente termice.

■ Fără o cunoaştere cât mai exactă a caracteristicilor elastice – ***E, G şi*** ν **-** ale materialelor utilizate, o proiectare şi realizare rațională a diverselor structuri mecanice moderne devine, practic, de neconceput.

BIBLIOGRAFIE

[1] Crețu, A., ş.a. *Anagrama lui Robert Hooke*, În: “Tensiuni … Stress … Contraintes …”, Cluj – Napoca, Editura Mediamira, 2001.
[2] Deutsch, I., *Rezistența materialelor*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[3] Gordon, J.E., *Structures et matériaux. L`explication mécanique des formes*. Paris, Editions “Pour la Sciences S.A.R.L.”, 1994.
[4] Hellemans, A., Bunch, B., *Istoria descoperirilor ştiinţifice*. Bucureşti, Editurile Orizonturi şi Lider, 1998.
[5] Kümbetlian, G., Mândrescu, Georgeta, *Mecanica solidelor deformabile*. *Retrospectivă cronologică 1452 – 1952*. Editura Alma, 2005.
[6] Ponomariov, S.D., ş.a. *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini* (vol. 1). Editura tehnică, Bucureşti, 1960.
[7] Timoshenko, S. P., *Istoria Rezistenţei Materialelor*. Editura AGIR, Bucureşti, 2006.

Prof.Dr.Ing. Augustin CREŢU
Facultatea de Mecanică, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
membru AGIR
e-mail: acretu@rezi.utcluj.ro
Conf.Dr.Ing. Rodica CREŢ
Facultatea de Inginerie Electrică, membru AGIR
Ing. Dănuţ MATEESCU
profesor, Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Târgovişte