A XI-a Conferinţă Naţională multidisciplinară – cu participare internaţională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2011

STUDIUL ANALITIC ŞI NUMERIC AL DEPLASĂRILOR PENTRU O GRINDĂ ARTICULATĂ

Mihaela SIMION, Adrian-Ioan BOTEAN, Mircea BEJAN

THE ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF DISPLACEMENTS FOR AN ARTICULATED BEAM

In this paper had realized an analytical and numerical study to determine the displacements and stresses for an articulated square beam loaded to bending. To realize this study had considered the following two cases: a) the beam is continuous and b) the beam has a joint in the middle. For numerical analysis had used the ANSYS 12.1 (for static and dynamic analysis) and RDM software and for analytical study had used the relations from literature.

Keywords: articulated beam, displacements, stresses, finite element
Cuvinte cheie: grindă articulată, deplasări, tensiuni, elemente finite

1. Introducere

Metoda elementelor finite (MEF) este o metodă numerică aproximativă de calcul care permite realizarea unor analize statice şi dinamice ale sistemelor mecanice, precum şi optimizări de geometrie.

În lucrarea de faţă, pentru studiul unei grinzi continue şi articulate sunt folosite următoarele module de analiză numerică din pachetul ANSYS 12.1: Static Structural; Transident Structural (ANSYS); Transident Structural (MBD); Mechanical ADPL (ANSYS).

Prin analiza statică structurală *(Static Structural)* sunt determinate deplasări, deformaţii, tensiuni şi eforturile din structuri sau din elemente componente ale structurii generate de sarcini exterioare.

Nu sunt luate în considerare efectele inerțiale. În acest caz, solicitările şi răspunsul structurii/elementelor la solicitări au o variație scăzută în raport cu timpul.

Analiza tranzitorie structurală, *Transident Structural (ANSYS)*, este utilizată pentru determinarea comportării dinamice a unei structuri sub acțiunea forțelor (solicitărilor) ce variază în timp. Se pot determina variația în timp a deplasărilor, deformațiilor, tensiunilor şi a forțelor din structură ca răspuns la orice solicitare tranzitorie. În acest caz sunt importante efectele inerțiale.

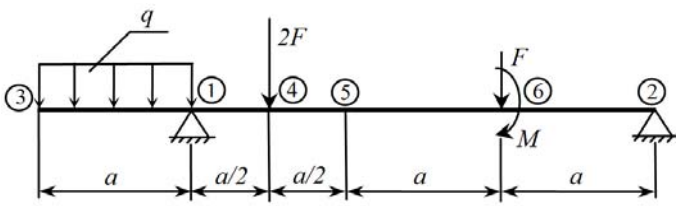
Cel de-al doilea tip de analiză tranzitorie, *Transident Structural (MultiBody Dynamics)*, ajută la determinarea comportării dinamice a unui ansamblu de corpuri rigide, conectate între ele prin articulații şi arcuri. Datele de intrare şi de ieşire (rezultate), în acest caz, sunt forțe, momente, deplasări, viteze şi accelerații; deoarece corpurile sunt considerate rigide, deformațiile şi tensiunile nu se pot determina.

Cu ajutorul modulului *Mechanical ADPL* se pot realiza atât analize statice, cât si analize dinamice, modale etc., şi oferă utilizatorului posibilitatea de a controla diferiți parametrii, cum ar fi: tipul de element finit, punctul în care se doreşte a se determina deplasările şi tensiunile maxime, definirea materialului etc.

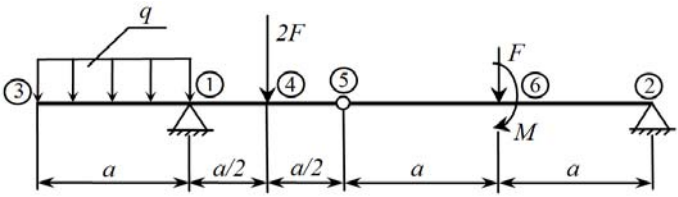
2. Studiul analitic a grinzii solicitată la încovoiere

Pentru studiul analitic, se consideră o grindă de secțiune pătrată din oțel, având dimensiunile 5X5X200 mm solicitată la încovoiere de forțele F_i, $(i = 1 \div 6)$, de momentul încovoietor $M = 5000\ N \cdot mm$, de sarcina uniform distribuită $q = 2\ N/mm$ pe o porțiune din grindă de lungime $a = 50$ mm. Constantele elastice ale materialului sunt: modulul lui Young $E = 2{,}1 \times 10^5\ N/mm^2$ şi coeficientul lui Poisson $\nu = 0{,}3$.

În figura 1, a) şi b) sunt prezentate modul de rezemare (reazeme simple) şi de solicitare în cazul grinzii continue şi articulate.



a)



b)

Fig. 1 Schema de rezemare şi solicitare pentru grinda continuă (a) şi grinda articulată (b) [1]

Având în vedere figura 1, a şi aplicând Teorema lui Castigliano se determină deplasarea în punctul 5 în cazul ***grinzii continue***:

$$\delta_i = \frac{\partial U_d}{\partial F_o} \tag{1}$$

Astfel, valoarea deplasării în punctul 5 va fi:

$$\delta_5 = 0{,}50 \text{ mm}$$

Pentru determinarea deplasării în punctul în care se află articulația - în cazul ***grinzii articulate*** (figura 1, b) – ținând cont de ecuația diferențială a fibrei medii deformate (relația 2) şi aplicând metoda identificării constantelor de integrare (metoda CLEBSCH), se determină deplasarea în punctul 5.

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M(x) \tag{2}$$

în care EI_z reprezintă modulul de rigiditate la încovoiere al secțiunii grinzii, iar $M(x)$ reprezintă momentul încovoietor în secțiunea *x* a grinzii.

Valoarea deplasării în acest caz este:

$$\delta'_5 = 1{,}19 \text{ mm}$$

Tensiunea maximă, în cazul grinzii continue şi articulate, s-a determinat utilizând relația lui Navier, astfel:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i_{max}}}{W_z} \tag{3}$$

în care σ_{max} reprezintă tensiunea normală maximă, $M_{i_{max}}$ reprezintă momentul încovoietor maxim (valoarea sa se ia din diagrama de momente a grinzii, $M_{i_{max}} = 5833{,}5 \text{ N} \cdot \text{mm}$), W_z reprezintă modulul de rezistență axial în raport cu axa *z* ($W_z = 20{,}8333 \text{ mm}^3$).

Valoarea analitică a tensiunii normale maxime va fi:

$$\sigma_{max} = 280 \ N/mm^2$$

3. Rezultate obținute

3.1. Grinda continuă

Pentru studiul numeric al deplasării şi tensiunii maxime s-a modelat grinda continuă cu ajutorul programului Mechanical ADPL (ANSYS 12.1), ținându-se cont de modul de rezemare şi de încărcare prezentate în figura 1, a.

Pentru discretizare s-a ales elementul finit de tip BEAM3 (BEAM 2D elastic) ce posedă 3 grade de libertate (translații de-a lungul axelor *x* şi *y* şi o rotație în raport cu axa *z*), lungimea elementului fiind de 10 mm.

De asemenea, pentru acest studiu s-a utilizat şi programul RDM pentru validarea modului de lucru în programul ANSYS.

În figura 2 se prezintă deformarea grinzii continue solicitată la încovoiere cu valoarea forței $F_1 = 100 \ N$, iar în figura 3 se prezintă distribuția tensiunilor normale.

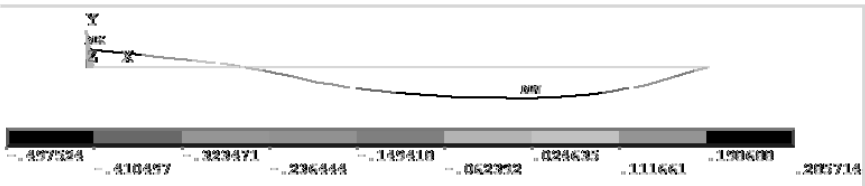


Fig. 2 Deformarea grinzii continue (pentru $F = 100 \ N$)

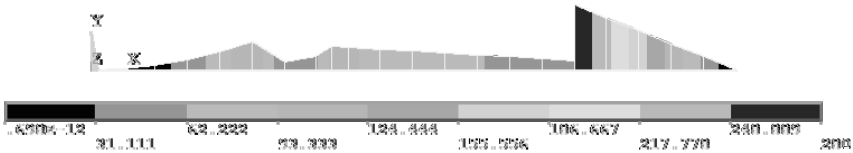


Fig. 3 Distribuția tensiunilor normale (pentru $F = 100 \ N$)

În tabelul 1 sunt date valorile obținute numeric ale deplasărilor în punctul 5, iar în tabelul 2 sunt date valorile tensiunilor normale maxime la distanța $x = 150 \ mm$.

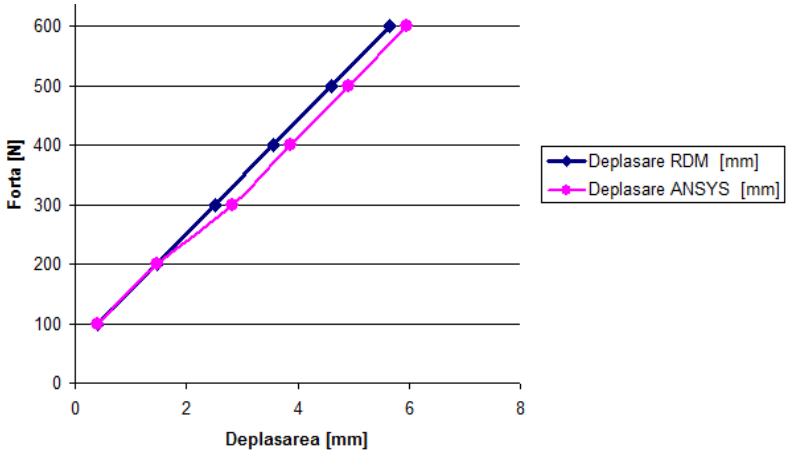
Tabelul 1

Nr.crt.	F [N]	δ_{RDM} [mm]	δ_{ANSYS} [mm]	Abaterea relativă [%]
1	100	0,4126	0,4126	0
2	200	1,4603	1,4603	0
3	300	2,5079	2,82	11,06
4	400	3,5555	3,8730	8,19
5	500	4,6031	4,9206	6,45
6	600	5,6507	5,968	5,31

Tabelul 2

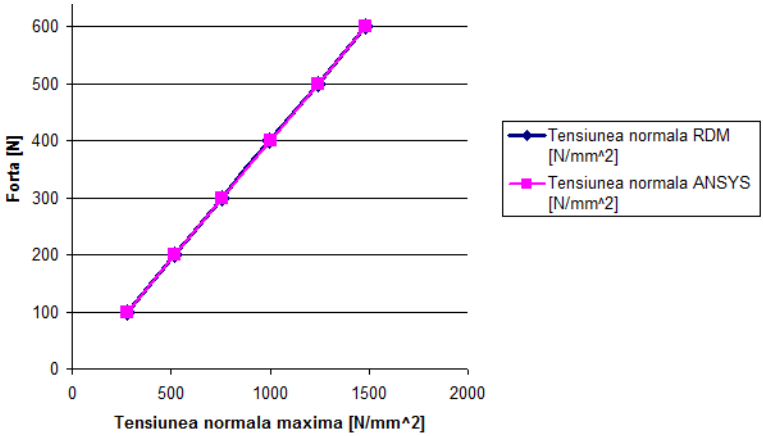
Nr.crt.	F [N]	σ_{RDM} $[N/mm^2]$	σ_{ANSYS} $[N/mm^2]$	Abaterea relativă [%]
1	100	280	280	0
2	200	519,99	520	0,0001
3	300	759,99	760	0,0001
4	400	999,99	1000	0,0001
5	500	1239,99	1240	0,0008
6	600	1479,99	1480	0,0006

Având în vedere rezultatele obținute ale deplasărilor şi ale tensiunilor normale din tabelul 1 şi 2, s-au trasat diagramele din figura 4, ce exprimă variația deplasărilor, respectiv a tensiunilor, în funcție de forțele aplicate.



a)

Fig. 4 Diagrama deplasărilor în funcție forțele aplicate, obținute prin MEF



b)

Fig. 4 Diagrama tensiunilor maxime în funcție forțele aplicate, obținute prin MEF (continuare)

3.2. Grinda articulată

Pentru determinarea deplasării grinzii articulate s-au utilizat, din programul ANSYS Workbench 12.1, următoarele module: Static Structural, Transident Structural (ANSYS) şi Transident Structural (MBD), descrise anterior.

Modul de rezemare şi încărcare a grinzii articulate se realizează ținând cont de figura 1, b, iar rotația articulației grinzii are loc după axa *z*.

Se menționează faptul că, în modulul Transident Structural (MBD), figura 7, reazemele convenționale sunt înlocuite cu o articulație de tip Slot (grade de libertate: o translație în raport cu axa *x* şi rotații în raport cu axele *x*, *y* şi *z*), respectiv cu o articulație sferică (grade de libertate: rotații în raport cu axele *x*, *y*, *z*).

În urma discretizării grinzii au rezultat un număr de 47.491 de noduri şi 25.284 de elemente.

În figura 5 şi 6 se prezintă modul de deformare a grinzii în regim static şi în regim tranzitoriu (Transident Structural ANSYS) aplicând o forță având valori cuprinse între 100 – 600 N.

În regimul tranzitoriu Transident Structural MBD, datorită faptului că în acest caz, grinda se consideră rigidă şi nu se pot aplica forțe, se impun unghiuri de rotație a articulației, în urma rotirii cu unghiul respectiv rezultând valoarea deplasării în acea articulație.

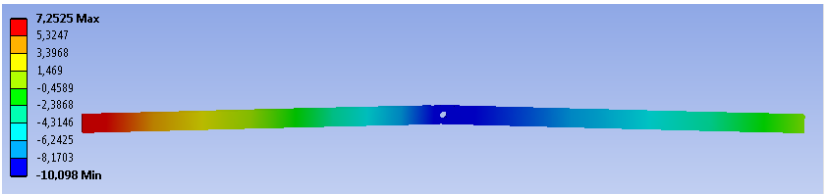


Fig. 5 Deplasarea grinzii articulate - ANSYS 12.1
(Static Structural) - pentru $F = 600$ N

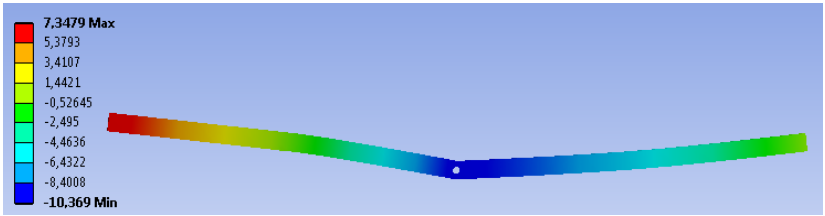


Fig. 6 Deplasarea grinzii articulate - ANSYS 12.1
(Transident Structural) - pentru $F = 600$ N

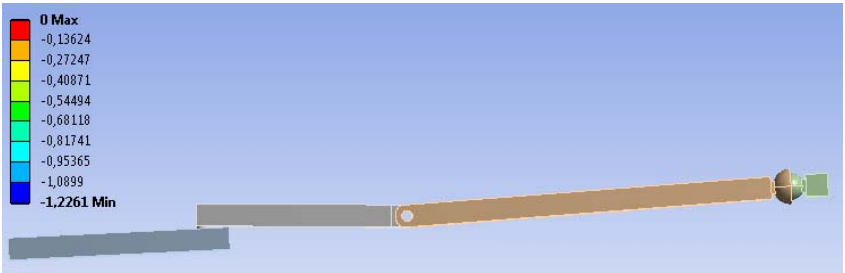


Fig. 7 Deplasarea grinzii articulate - ANSYS 12.1
(Transident Structural MBD)

În tabelul 3 sunt sistematizate valorile deplasărilor obținute în funcție de forțele aplicate în regim static şi tranzitoriu (Structural Transident ANSYS).

În tabelul 4 sunt prezentate valorile deplasărilor în funcție de unghiurile de rotație impuse articulației în regimul tranzitoriu Transident MBD.

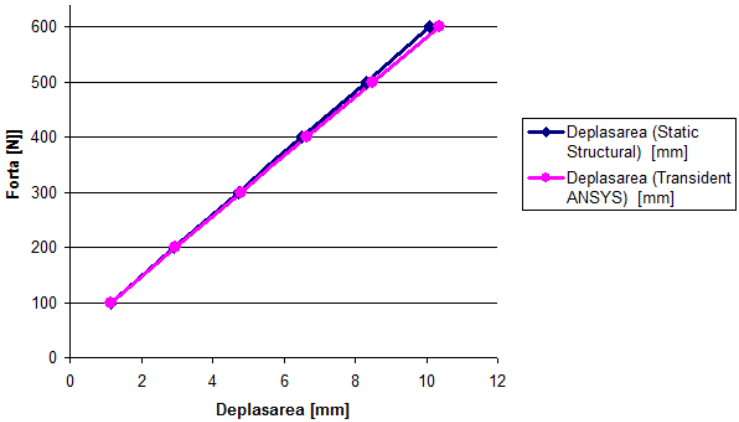
Cu ajutorul rezultatelor obținute din tabelele 3 şi 4, s-au realizat diagramele de variație a deplasărilor din figura 8, în funcție de forțele aplicate şi de unghiul de rotație impus în articulația grinzii.

Tabelul 3

Nr.crt.	*Forţa [N]*	$\delta_{Static\ Structural}$ *[mm]*	$\delta_{Transident\ (ANSYS)}$ *[mm]*	*Abateri relative [%]*
1	100	1,1441	1,1423	0,15
2	200	2,9349	2,9539	0,64
3	300	4,7258	4,7885	0,80
4	400	6,5166	6,64	1,85
5	500	8,3074	8,5032	2,30
6	600	10,098	10,369	2,61

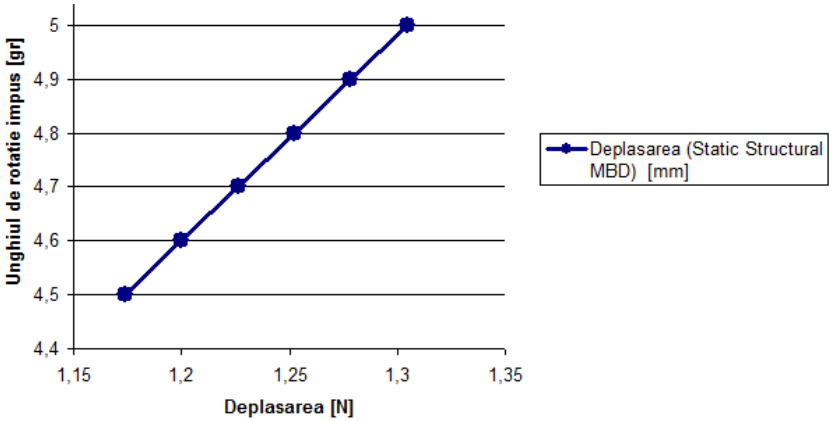
Tabelul 4

Nr.crt.	*Unghiul de rotaţie impus* $\lfloor^{o}\rfloor$	$\delta_{Transident(MBD)}$ *[mm]*
1	4,5	1,1739
2	4,6	1,2
3	4,7	1,2261
4	4,8	1,2522
5	4,9	1,2784
6	5	1,3045



a)

Fig. 8 Variația deplasărilor în funcție de valoarea forțelor aplicate



b)

Fig. 8 Variația deplasărilor în funcție de unghiul de rotație impus (continuare)

4. Concluzii şi observații

Pentru determinarea deplasărilor şi tensiunilor se studiază o grindă din oțel de secțiune pătrată solicitată la încovoiere considerându-se două cazuri: grindă continuă şi grindă articulată.

Studiul deplasărilor şi tensiunilor se realizează analitic şi prin MEF, în regim static şi dinamic.

În urma studiului se pot evidenția următoarele:

■ în regim static şi dinamic, pentru ambele cazuri de grinzi, rezultatele deplasărilor şi tensiunilor obținute analitic şi numeric, pentru $F_1 = 100\ \mathrm{N}$, se regăsesc în aceeaşi plajă de mărimi, abaterile relative fiind sub 10 %, validând astfel modul de lucru cu programul ANSYS;

■ în cazul regimului tranzitoriu MBD, impunând unghiul de rotație a articulației se poate determina deplasarea în zona articulației. Altfel supus, se poate determina unghiul optim de rotație astfel încât deplasarea să fie cea dorită sau aproximativ egală cu cea determinată analitic sau experimental. În acest mod, se poate controla deplasarea sistemului astfel încât deplasările sale să fie cât mai reduse, rezultând o comportare dinamică bună a sistemului;

■ având în vedere rezultatele sistematizate în tabelul 4, unghiurile optime pentru ca deplasarea rezultată să fie aproximativ

egală cu cea obținută analitic, sunt cuprinse în intervalul $4,5^{o} \div 4,8^{o}$, abaterile relative fiind sub 5 %;

■ analizând diagramele din figura 4 şi 8 se poate observa avantajele metodei cu elemente finite (programele ANSYS şi RDM), aceasta putând fi aplicată şi în cazul unor mecanisme complexe.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bejan, M., *Rezistența materialelor*, Vol. 1 şi 2, Ediția a IV-a, Editura AGIR, Bucureşti, Editura MEGA, Cluj-Napoca, 2009.
[2] Hărdău, M., *Metoda elementelor finite*, Atelierul de Multiplicare al Univ. Tehnice din Cluj-Napoca, 2003.
[3] Ghiorghe, A., *Optimization design for the structure of an RRR type industrial robot*, U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol. 72, Iss.4, ISSN 1454-2358, 2010.
[4] * * * University of Alberta - tutoriale ANSYS.

NOTĂ: Această lucrare a beneficiat de suport financiar prin proiectul "Studii doctorale în ştiințe inginereşti în scopul dezvoltării societății bazate pe cunoaştere - SIDOC ", contract: POSDRU/88/1.5/S/60078, proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013."

Drd.Ing. Mihaela SIMION
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca,
membru AGIR
e-mail: mihap_elly@yahoo.com
Asist.Dr.Ing. Adrian-Ioan BOTEAN
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca,
membru AGIR
e-mail: Adrian.Ioan.Botean@rezi.utcluj.ro
Prof.Dr.Ing. Mircea BEJAN
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca,
membru al Consiliului Director al Asociației Generale a
Inginerilor din România – AGIR, preşedintele Filialei Cluj a AGIR
e-mail: Mircea.Bejan@rezi.utcluj.ro