A XIV-a Conferinţă internaţională – multidisciplinară,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2014

METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ CU ELEMENTE LINIARE, PENTRU O REŢEA AXIALĂ ÎN "S"
Partea a II-a

Ionel Doru BACIU

BORDER ELEMENT METHODS WITH LINEAR ELEMENTS, FOR A NET AXIAL "S" - Part II

This paper, for a reversible cascade "S" axial profiles., presents boundary element method (BEM), with linear elements, for the numerical simulation of ideal incompressible fluid. BEM apply for Laplace's equation depending on flow and hydrodynamic field, speed and pressure are obtained, inside of domain analysis for a axial "S" axial cascade.

Keywords: axial "S" axial cascade, linear elements, BEM, Laplace equation, hydrodynamic field
Cuvinte cheie: cascada axială axial "S", elemente liniare, BEM, ecuaţia lui Laplace, domeniul hidrodinamic

1. Introducere

Stocarea energiei hidraulice, este necesară în centralele hidro-electrice, pentru exploatarea eficientă a potenţialului hidroenergetic în regim de funcţionare şi pentru a fie echipate cu maşini hidraulice reversibile, numite pompe-turbine.

Cu ajutorul metodei elementului de frontieră, se pot crea astfel de profile, pentru reţele axiale în "S".

2. Calculul funcţiei u şi a derivatelor acesteia în interiorul frontierei Γ

Fie $M_0(\zeta_0 = (x_0, y_0)) \in \Omega$. În acest caz, $c(\zeta_0) = 1$.

Funcţia u, pentru $\zeta = \zeta_0$ devine:

$$u(\zeta_0) = \sum_{j=1}^{N} G_{0j} q_j - \sum_{j=1}^{N} H_{0j} u_j \tag{1}$$

unde: $G_{0j} = \int_{\Gamma_{j+1}} {}_1 u^*(\zeta_0)\, ds + q_j \int_{\Gamma_j} {}_2 u^*(\zeta_0) ds$

$$H_{0j} = \int_{\Gamma_{j+1}} {}_1 q^*(\zeta_0) ds + \int_{\Gamma_j} {}_2 q^*(\zeta_0) ds \tag{2}$$

Integralele din relaţiile (2) se reduc la integrale definite nesingulare $(\text{pentru } t \in [-1, 1])$. Se calculează identic ca și în cazul coeficienţilor H_{ij} şi G_{ij} $(\text{cu } i \neq j)$.

Deoarece funcţiile u* şi q^* sunt indefinit derivabile, în orice $\zeta_0 \in \Omega$, în ecuaţiile (2) se pot deriva sub ori de câte ori se doreşte; rezultă:

$$\frac{\partial^{m+n} u(\zeta_0)}{\partial x_0^m \, \partial y_0^m} = \sum_{j=1}^{N} G_{0j}^{(m,n)} q_j - \sum_{j=1}^{N} H_{0j}^{(m,n)} u_j \tag{3}$$

cu

$$\begin{cases} G_{0,j}^{(m,n)} = \int_{\Gamma_{j+1}} {}_1 \dfrac{\partial^{m+n} u^*(\zeta_0)}{\partial x_0^m \, \partial y_0^m} ds + q_j \int_{\Gamma_j} {}_2 \dfrac{\partial^{m+n} u^*(\zeta_0)}{\partial x_0^m \, \partial y_0^m} ds \\ H_{0j}^{(m,n)} = \int_{\Gamma_{j+1}} {}_1 \dfrac{\partial^{m+n} q^*(\zeta_0)}{\partial x_0^m \, \partial y_0^m} ds + \int_{\Gamma_j} {}_2 \dfrac{\partial^{m+n} q^*(\zeta_0)}{\partial x_0^m \, \partial y_0^m} ds \end{cases}$$

Deoarece exprimarea analitică a derivatelor parţiale $\dfrac{\partial^{m+n} u^*(\zeta_0)}{\partial x_0^m \, \partial y_0^m}$, respectiv $\dfrac{\partial^{m+n} q^*(\zeta_0)}{\partial x_0^m \, \partial y_0^m}$ este complexă, se preferă de multe ori calculul funcţiei u prin derivare numerică.

Aceasta, deoarece se pot calcula valorile funcţiei u în puncte oricât de apropiate, folosind relaţiile (1). Se recomandă metoda de derivare numerică prin trei puncte.

3. Formularea problemei în ψ şi φ

3.1 Generalităţi

În mişcarea bidimensională (plană) a fluidelor incompresibile un rol important îl au cele două funcţii auxiliare: funcţia de curent ψ şi potenţialul vitezei φ. Ambele funcţii verifică ecuaţia lui Laplace şi definesc câmpul de viteze în domeniul de analiză.

Componentele vitezei v_x şi v_y, funcție de φ și ψ :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ v_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

Pentru a defini problema în ψ şi φ, sunt necesare să fie definite două elemente:

- domeniul de analiză şi
- condiţiile pe frontieră.

Domeniul de analiză, se alege în aşa fel încât să se reflecte efectul de periodicitate, precum şi faptul că, la o distanţă suficient de mare de profile (în direcţia axei Ox), curentul este format din drepte paralele, iar viteza este constantă. Aceste două condiţii asigură condiţii la limită relativ simple.

3.2 Formularea problemei directe în ψ

Se consideră o reţea axială plană de turbină. Domeniul de analiză Ω, este format din trei subdomenii (figura 3 partea întâi):

- subdomeniul BCFG – format de intradosul şi extradosul a două profile vecine;
- subdomeniile ABGH şi CDEF, două dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele Ox, respectiv Oy şi de dimensiuni t/2, respectiv t – unde t este pasul reţelei.

Frontiera Γ, a domeniului de analiză Ω, este formată din opt părţi:

- patru segmente AB, CD, FE şi HG – paralele cu axa Ox, de lungime t/2;
- două segmente AH şi DE – paralele cu axa Oy, de lungime t;
- extradosul GF şi intradosul BC a două profile învecinate.

Condiţiile la limită, care rezultă din periodicitatea reţelei, sunt următoarele:

$$\psi|_{GF} = 0, \quad \psi|_{BC} = t$$

$$\psi|_{AB} = \psi|_{HG} + t, \quad \psi|_{CD} = \psi|_{FE} + t \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{AB} = -\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{HG}, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{CD} = -\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{FE}$$

O formulare mai riguroasă, a condiţiilor de pe rândul doi a sistemului (5), este:

$$\psi(x, y + t) = \psi(x, y) + t, \ (x, y) \in HG. \tag{6}$$

În problema directă se presupune cunoscută valoarea unghiului amonte β_{AM} şi urmează să se determine valoarea unghiului aval β_{AV}.

Pe muchia de ieşire, are loc relaţia:

$$\partial\psi / \partial n|_{DE} = -\operatorname{ctg}(\beta_{AV}) \tag{7}$$

Deci, derivata normală a funcţiei ψ, este o constantă necunoscută pe DE.

Fie $D \equiv M_i, M_{i+1}, \ldots, M_{i+p} \equiv E$, nodurile pe frontiera DE. Conform celor de mai sus, rezultă:

$$q_{i+1} = q_i \quad \text{pentru } I = 1, \ldots, p \tag{8}$$

Deoarece relaţiile (5), (6) şi (7) ne furnizează (N – 1) condiţii la limită, se mai introduce condiţia de viteză zero, într-un punct V' (figura 3, partea întâi). Pe profil, viteza este $\partial\psi/\partial n$, deci condiţia Kutta-Jukovski-Carafoli, va fi:

$$\partial\psi / \partial n|_{V'} = 0 \tag{9}$$

Astfel, pentru problema directă în ψ, condiţiile pe frontieră, sunt date de relaţiile: (5), (6), (7) şi (9).

3.3 Formularea problemei inverse în ψ

Se consideră aceeaşi reţea de turbină şi se rezolvă ecuaţia $\Delta\psi = 0$, pe acelaşi domeniu $\overline{\Omega}$. Deosebirea constă în faptul că se presupune cunoscut unghiul aval β_{AV}, iar cel amonte β_{AM},

necunoscut. Condiţia Kutta-Jukovski-Carafoli se impune într-un punct V, în apropierea bordului de atac (figura 3, partea întâi).

$$\partial\psi / \partial n\big|_V = 0 \qquad (10)$$

Aşadar, la problema inversă, condiţiile pe frontieră sunt (5), (6), (7) şi (10), cu precizarea că punctul $M_i \equiv H$, iar punctul $M_{i+p} \equiv A$.

4. Programe de calcul pentru reţelele axiale de profile în „S”

Programele de calcul au fost realizate, prin aplicarea M.E.F. în vederea determinării analitice a:

- scheletului profilelor în ”S”, din profile aparţinând familiilor de tip NACA;
- conturului profilelor în ”S”, din profile aparţinând familiilor de tip NACA;
- câmpurilor de viteze de pe frontiera profilelor în ”S”, în reţea;
- câmpurilor de presiuni (coeficienţii de presiune) de pe frontiera profilelor în ”S”, în reţea;
- domeniului de analiză;
- câmpului hidrodinamic a reţelei de profile în ”S”;
- câmpurilor de viteze prin reţeaua de profile în ”S” şi
- câmpurilor de presiuni (coeficienţilor de presiune) prin reţeaua de profile în ”S.

Se menţionează că aceste programe se pot aplica oricărei tip de reţele axiale.

Programele realizate pentru mişcarea plană în jurul reţelelor axiale de profile în ”S”, prin aplicarea M.E.F. cu elemente liniare, au fost concepute prin reducerea tuturor mărimilor geometrice şi cinematice dimensionale, la forme adimensionale:

- pentru calculul mărimilor geometrice – lungimi;
- pentru calculul mărimilor cinematice – viteze;
- pentru calculul unghiul de ieşire;
- pentru calculul coeficientul de presiune;
- pentru calculul circulaţiei Γ.

5. Concluzii

■ Prin aplicarea M.E.F. cu elemente liniare ecuației Laplace, la valorile funcţiei potenţiale şi de curent, se obţin valorile funcţiei, derivata ei normală pe frontiera domeniului de analiză, valoarea circulaţiei pe frontieră, precum şi valorile vitezei şi presiunii în interiorul domeniului analizat.

■ Prin aplicarea M.E.F., cu elemente liniare, în hidrodinamica turbomaşinilor, se pot determina reţele profile în ”S”, care utilizate pentru maşinile hidraulice reversibile, conduc la funcţionare cu randamente ridicate.

BIBLIOGRAFIE

[1] Baciu, I.D., *Experimental tests in wind tunnel for an axial cascade of reversible profiles*, Hidraulică, Revista de hidraulică –pneumatică – ungere centralizată – mecatronica, nr.1 (18), mai 2006, Editată de Institutul de cercetări pentru hidraulică şi pneumatică,ISSN / 1453 – 7303, serie nouă, pag. 39-42.

[2] Baciu, I.D., *Studiul unei familii de reţele axiale reversibile cu aplicaţii la proiectare turbomaşinilor*, Teza de doctorat, 2008.

[3] Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, 1978.

[4] Carte, I.N., Baciu, I.D., *Velocity and pressure field on the profile boundary of the reversible profile cascades*, Fifth International Conference on Hydraulic Machinery and Hydrodynamics, vol.I October 2000, pag.23-30, Timişoara.

Asist.Dr.Ing. Ionel Doru BACIU
Universitatea ”Politehnica” din Timișoara
Departamentul MMUT, Colectivul Mașini Hidraulice
E-mail: dodo.i.baciu@gmail.com
str.D..Jugănaru nr.5, sc.A, ap.7
300765 -Timişoara
tel. mobil: 0749504001; 0725470533
membru AGIR