A XIV-a Conferinţă internaţională – multidisciplinară,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2014

STUDIUL EFECTULUI TEMPERATURII ÎN APARIŢIA TENSIUNILOR REMANENTE DIN CAZUL DISCURILOR DE GROSIME MICĂ.
Partea I-a – STUDIUL PROPAGĂRII TEMPERATURII

Gheorghe N. RADU, Ioana COMĂNESCU

THE STUDY OF TEMPERATURE EFFECT IN THE RESIDUAL STRESSES OCCURRENCE FOR THE CASE OF LOW THICKNESS DISKS
PART I – THE STUDY OF THE TEMPERATURE PROPAGATION

In order to determine the state of stress and deformation due to the temperature, one has to study, as exactly as possible, the temperature's propagation mode. There are many practical situations when in some bodies' material exist self-balanced stresses, even in the absence of any load.

These are residual stresses. Their magnitude and their distribution depend on the material, on the technological working process, on the machine parts' size. The residual stresses appear mainly because of the local deformations in the elastic-plastic field, because of some structural transformation or because of some thermo-elastic-plastic deformations.

The paper presents some aspects regarding the residual stresses due to the heat treatment and to the shallow working.

Key words: residual stresses, deflections, temperatures, plastic plate

Cuvinte cheie: tensiuni remanente, deformaţii plastice, temperatură, placă

1. Introducere

Determinarea tensiunilor remanente în toate situaţiile întâlnite în practică sunt de mare importanţă. În urma tratamentelor termice apar tensiuni remanente datorate transformărilor fazice şi tensiuni remanente datorate deformaţiilor termo-elasto-plastice. Datorită caracterului dinamic al proceselor termice, tensiunile care apar în materialul aflat în câmp nestaţionar vor duce la apariţia unor deformaţii plastice locale care vor avea drept consecinţă apariţia unor tensiuni remanente.

Pentru un corp oarecare, confecţionat dintr-un material omogen şi izotrop, ecuaţia generală de conducţie a căldurii are forma [H.Parkus]:

$$K^2 \nabla^2 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{1}$$

unde s-au folosit notaţiile:

$-\mathrm{K} = \dfrac{\lambda}{\rho \cdot \mathrm{c}}$, coeficient de difuziune a materialului;

- λ, conductivitatea materialului;
- ρ, densitatea materialului;
- c, căldura specifică, θ fiind temperatura.

Cu relaţia

$$dq = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} \cdot dS \tag{2}$$

s-a notat cantitatea de căldură care trece printr-un element de suprafaţă dS în unitatea de timp. Relaţia arată că λ depinde de cantitatea de căldură dq, $\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{n}}$ fiind o derivată parţială în raport cu direcţia normalei n la suprafaţa luată în studiu.

În general, relaţiei (1) i se ataşează condiţii de legătură. Acestea pot fi:

1. În funcţie de condiţiile concrete de studiu, se acceptă o anumită funcţie F(x,y,z,t) care indică distribuţia temperaturii:

$$\theta = F(x,y,z,t) \tag{3}$$

2. Dacă mediul înconjurător are o temperatură θ_o, atunci transferul de temperatură este de forma,

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + K(\theta - \theta_o) = 0 \tag{4}$$

unde K este coeficientul de transfer de căldură.

Pentru deformaţii mici şi modul de elasticitate transversal independent de temperatură:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial(\alpha\theta)}{\partial x}\\
&\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial y} - \frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial(\alpha\theta)}{\partial y}\\
&\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial(\alpha\theta)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{5}$$

În coordonate cilindrice, r, φ, z, cu simetrie după axa z şi deplasări u, v = 0, w, ecuaţiile (5) devin:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial(\alpha\theta)}{\partial r}\\
&\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial(\alpha\theta)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{6}$$

unde ∇^2 este:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \qquad (7)\ (8)$$

Pentru început s-a studiat modul de propagare a căldurii, pe baza rezolvării ecuaţiilor de formă:

$$f(x,t) = c(x,t)\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial\left[k(x,t)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]}{\partial x} \tag{9}$$

Soluţia ecuaţiei (1) notată cu $\theta(x,t)$ reprezintă temperatura într-un punct oarecare de abscisă x şi determinată la timpul t.

Dacă se acceptă cazul particular în care propagarea căldurii se face după direcţia liniară Ox, "capetele" fiind menţinute la temperaturi cunoscute, relaţia (9) ia forma:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\left(k\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)}{\partial x} \tag{10}$$

unde k(x,t) este coeficientul de conductibilitate termică. Dacă s-ar considera că variaţia coeficientului k cu temperatura ar fi neglijabilă, problema ar deveni liniară. În realitate k este o funcţie de temperatură de forma:

$$\mathrm{k}=\alpha\theta+\beta \tag{11}$$

problema studiată fiind neliniară. Constantele α şi β se determină pe baza a două valori ale lui k cunoscute, funcţie de temperatura θ. Se precizează că valoarea lui k nu depinde explicit de coordonata liniară x şi deci relaţia (10) are forma de studiu:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=(\alpha\theta+\beta)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{12}$$

Pe baza condiţiilor iniţiale şi la limită se ajunge la studiul sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}=(\alpha\theta+\beta)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2};\\ \theta(x,0)=\dfrac{\theta_1-\theta_0}{l}x+\theta_0, \qquad pentru \quad 0\le x\le l;\\ \theta(0,t)=\theta_0, \qquad pentru \quad 0\le t\le T;\\ \theta(l,t)=\theta_1, \qquad pentru \quad 0\le t\le T.\end{cases} \tag{13}$$

Rezolvarea s-a făcut în diferenţe finite, concluziile fiind de mare importanţă.

O abordare analitică a sistemului de relaţii (13) în scopul obţinerii de rezultate concrete este foarte dificilă. Domeniul $[0,\ell]$ în abscisă şi [0,t] în ordonată, se discretizează printr-o reţea de paralele echidistante. Pasul reţelei în abscisă este Δx, iar în ordonată, Δt. Un nod al reţelei va avea coordonatele:

$x_i = (i - 1)\Delta x;$
$t_j = (j - 1)\Delta t$, iar temperatura
$\theta_i(x_i,t_j) = \theta_{i,j}$.

În nodurile reţelei, ecuaţia cu derivate parţiale (13) se va scrie:

$$\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta t} = (\alpha\theta + \beta)_{i,j} \frac{\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Se foloseşte notaţia,

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

şi rezultă forma:

$$\theta_{i,j+1} = \lambda(\alpha\theta_{ij} + \beta)(\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) + \theta_{ij}. \qquad \text{(a)}$$

pentru toate punctele interioare ale reţelei. Pentru contur se transcriu relaţiile (13) sub forma:

$$\theta_{i,j} = \theta_0; \quad cu\, j = \overline{1,N}$$
$$\theta_{M,j} = \theta_1;$$

$$\theta_{i,1} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\ell} x_i + \theta_0 \quad cu\, i = \overline{1,M} \qquad \text{(b)}$$

Pentru urmarea calculelor şi fără a influenţa în rău rezultatele, se consideră totuşi restricţia $\lambda < ½$.

S-au rezolvat relaţiile (a) şi (b) printr-un program de calcul. S-au comparat rezultatele teoretice cu cele rezultate din determinări experimentale.

Autorii propun şi studiază în diferenţe finite o nouă lege de variaţie a temperaturii pe raza discului (a – raza interioară, b – raza exterioară, r – raza curentă).

$$t = \Delta T\left[c\frac{(r-a)^2}{(b-a)^2} + (1-c)\frac{r-a}{b-a}\right],$$

unde pentru c = 0 se obţine ”distribuţia liniară”.

De remarcat faptul că *tensiunea, deformaţia* şi *temperatura* sunt legate într-o manieră complicată. O generalizare a teoriei elasticităţii o face “termoelasticitatea”, care tratează comportarea corpurilor elastice sub influenţa câmpurilor neuniforme de temperatură. Ecuaţiile ce caracterizează acest domeniu sunt dependente de temperatură şi conţin termeni care leagă fluxul de căldură cu gradientul temperaturii locale. Soluţia exactă a problemelor de “termoelasticitate generală” prezintă dificultăţi mari şi numărul soluţiilor cunoscute este foarte mic.

Se arată în continuare modul de abordare a câmpului termic nestaţionar. Relaţia de calcul este de forma:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} - m^2\theta_{st} = 0 \qquad (14)$$

O abordare la general este foarte dificilă. Asemănător studiului relaţiei (10) şi pentru relaţia (14) vom face referiri la o problemă concretă şi anume la un disc inelar; acesta are raza interioară a, raza exterioară b şi grosimea h. Se face precizarea că prin θ s-a notat câmpul termic nestaţionar care are două componente: θ_{st} – componenta staţionară; θ_i – o componentă suplimentară care devine zero atunci când timpul t devine foarte mare. Urmează rezolvarea relaţiilor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta_{st}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\theta_{st}}{\partial r} - m^2\theta_{st} = 0; \\ \dfrac{\partial^2\theta_i}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\theta_i}{\partial r} - m^2\theta_i = \dfrac{1}{n}\dfrac{\partial\theta_i}{\partial t} \end{cases} \qquad (15)$$

unde:

θ este temperatura,

r – raza curentă,

m = 2k/λh – parametru ce ţine seama de coeficientul de transmitere a căldurii şi de conductibilitatea termică a materialului,

n = λ/cρ - parametru care ţine cont de căldura specifică şi densitatea materialului.

Rezolvarea relaţiilor (7) se face pe baza condiţiilor limită şi a celor iniţiale:

- pentru r = a, θ_i = 0, iar pentru r=b, θ_0' = 0;
- pentru t = 0, $\theta = \begin{cases} \theta_0, & pentru \quad r = a; \\ 0, & pentru \quad a < r \le b. \end{cases}$ (16)

Se vor face substituţii de forma: $\theta = e^{-\delta^2 nt} F(r)$

ajungându-se în final la soluţia generală de forma:

$$F = c_{1i} \nu_0 (\beta_i r) + c_{2i} N_0 (\beta_i r) \tag{17}$$

unde cu ν_0 s-au notat funcţiile Bassel, iar cu N_0 funcţiile lui Neumann. Astfel au putut fi determinate câmpurile termice nestaţionare.

Din analizele făcute, s-a constatat că pentru determinarea tensiunilor remanente, rezultate foarte bune se obţin şi prin "aproximarea" câmpurilor termice, aproximare făcută prin funcții simple.

Teoretic şi experimental s-a constatat că se pot obţine rezultate foarte bune cu relaţia:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\left(\frac{\varphi}{t}\right)^n \frac{r}{a}} \cdot \left[A + Be^{-\chi \frac{r}{b}} \right] \tag{18}$$

unde ρ, n, A, B şi χ se determină din condiţii de descriere a curbei exacte.

Rezultă câmpul termic staţionar:

$$\frac{\theta_{st}}{\theta_0} = A + Be^{-\chi\frac{r}{b}} \tag{19}$$

unde A, B şi χ se determină pe baza a trei valori existente în diagrama funcţiei $\theta_{st}(r)$, care este o funcţie monoton descrescătoare.

Se utilizează trei valori (de obicei semnificative): la r = a, r = (b-a)/2 şi r = b.

În continuare se dau câteva rezultate ale teoriei expuse. Referirile se fac pentru un caz concret: placă de rază *a* variabilă, raza *b* = 1000 mm şi grosime h = 50 mm.

La raza interioară temperatura iniţială este de 400 ^{0}C şi 600 ^{0}C. K = 6,79 J/m^{2}s·k – coeficient de transmitere a căldurii; χ = 16,97 J/m·s·k – coeficient de conductibilitate termică; c = 0,46 kJ/kg·k – căldura specifică; ρ = 7600 kg/m^3; m^2 = 16,1; n = 4,85·10^{-6} m^2/s (figura 1 şi 2 din partea a II-a a acestei lucrări).

BIBLIOGRAFIE

[1] Parkus, H., *Thermoelasticity*. Blairdell Publishing Company, 1981.

[2] Tani, J., T*hermal bucking of an annular plate with axisymmetric initial deflection*. Journal of Applied Mechanics, 1978.

[3] Iesean, D., *Teoria termoelasticitatii*. Editura Academiei, Bucuresti, 1979.

[4] Radu, N. Gh., Comănescu., I., *The temperature effects - experimental determinations. Elastic stability of the thin disks due to the temperature and rotation stress fields. Finite differencies – theoretical study*. MOCM 7. OPROTEH 2001.

[5] Furdac, Fl., *Modificarea stării de solicitare datorită tensiunilor remanente ale materialelor*, Teza de doctorat, 2000.

[6] Radu, N. Gh., *Contributii la studiul încovoierii și al stabilității elastice a discurilor subțiri în mișcare de rotație și în regim termic axial simetric*. Teza de doctorat, 1992.

Prof. Dr. Ing. Gheorghe N. RADU,
Universitatea ”Transilvania” din Braşov
B-dul Eroilor 29, 500036, Braşov
e-mail: rngh@unitbv.ro

Conf. Dr. Ing. Ioana Sonia COMĂNESCU
Universitatea ”Transilvania” din Braşov
B-dul Eroilor 29, 500036, Braşov
e-mail: ioanacom@unitbv.ro