A XIV-a Conferinţă internaţională – multidisciplinară,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2014

STUDIUL EFECTULUI FORŢEI TĂIETOARE ASUPRA DEFORMAŢIILOR GRINZILOR DREPTE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

Gheorghe Aurel GHERMAN

THE STUDY OF THE ACTION OF THE CROSS FORCE ON THE STRAIGHT BEAM BUCKLING IN CASE OF BENDING STRESS

The following paper presents a study done by the author on the straight beam buckling subjected to bending stress, by considering or neglecting the effect of the cross force. The study was done on different forms of the cross sections, respectively for different values of the ratio (relation) between the height of the beam section and its length.

Keywords: bending moment, shear force, deformations
Cuvinte cheie: moment încovoietor, forţă tăietoare, deformaţii

1. Consideraţii generale

Una din metodele uzuale de calcul a deformaţiilor elementelor de rezistenţă o reprezintă metodele energetice, prin exprimarea valorii energiei potenţiale de deformare acumulată în elementele de rezistenţă. Expresia generală a energiei potenţiale de deformare W_d acumulată într-o grindă dreaptă în care sarcinile exterioare dau naştere la eforturi ca: forţă axială N, forţă tăietoare T, moment încovoietor M_i, moment de torsiune M_t, este :

$$W_d = \int_L \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot A} \cdot dx + \int_L \frac{k \cdot T^2}{2 \cdot G \cdot A} \cdot dx + \int_L \frac{M_i^{\,2}}{2 \cdot E \cdot I} \cdot dx + \int_L \frac{M_t^{\,2}}{2 \cdot G \cdot J} \cdot dx \qquad (1)$$

În multe aplicaţii practice unii din termenii expresiei energiei potenţiale de deformare W_d au o valoare neglijabilă, luându-se în considerare numai efectul momentului încovoietor.

Este cunoscut faptul că efectul torţei tăietoare asupra deformaţiei elementului de rezistenţă este semnificativă pentru anumite valori ale raportului dintre înălţimea h a secţiunii şi lungimea L a elementului de rezistenţă, aceasta fiind influenţată şi de forma secţiunii transversale.

În cadrul lucrării se va considera exprimarea energiei potenţiale de deformare W_d exprimată numai prin termenii corespunzători forţei tăietoare T şi a momentului încovoietor M_i având expresia:

$$W_d = \int_L \frac{k \cdot T^2}{2 \cdot G \cdot A} \cdot dx + \int_L \frac{M_i^{\,2}}{2 \cdot E \cdot I} \cdot dx \qquad (2)$$

În relaţiile (1) şi (2) - k - reprezintă un coeficient care ţine seama de distribuţia tensiunii tangenţiale pe secţiune şi poate fi calculat ca raportul dintre aria totală a secţiunii transversale A şi aria de forfecare A_F:

$$k = \frac{A}{A_F} \qquad (3)$$

Valoarea ariei de forfecare A_F se calculează cu relaţia:

$$A_F = \frac{I^2}{\int_A \frac{S^2}{b^2} \cdot dA} \qquad (4)$$

în care: - I - reprezintă valoarea momentului de inerţie, iar - S - este momentul static, calculate în raport cu axa de încovoiere.

Din literatura de specialitate [1], [2], [3], [4] valorile ariilor de forfecare şi a coeficientului k au valorile prezentate în tabelul 1.

2. Prezentarea metodei de calcul

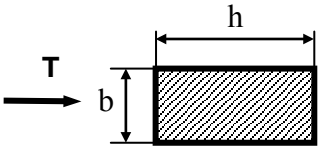
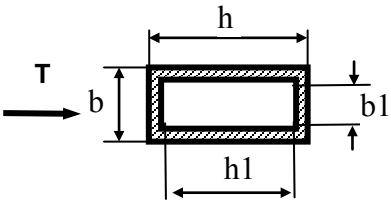
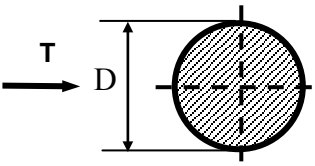
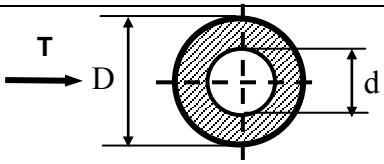
Pentru studiul influenţei forţei tăietoare asupra deformaţiilor s-a considerat o grindă simplu rezemată încărcată cu sarcină concentrată – F - şi o sarcină uniform distribuită - p, conform figurii 1. Se va studia valoarea deplasării în dreptul secţiunii de aplicare a forţei concentrate F. Aceasta se va calcula considerând expresia energiei de deformare

din relaţia (2) şi aplicând metoda de calcul a deplasărilor a lui Castigliano, se determină valoarea deplasării în dreptul secţiunii de aplicare a forţei concentrate F:

$$\delta_F\left(M_i,T\right)=\frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^b Mi1\left(x1\right)\cdot\frac{\partial Mi1\left(x1\right)}{\partial F}\cdot dx1+\frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^{L-b} Mi2\left(x2\right)\cdot\frac{\partial Mi2\left(x2\right)}{\partial F}\cdot dx2+$$

$$+\frac{k}{G\cdot A}\cdot\int_0^b T1\left(x1\right)\cdot\frac{\partial T1\left(x1\right)}{\partial F}\cdot dx1+\frac{k}{G\cdot A}\cdot\int_0^{L-b} T2\left(x2\right)\cdot\frac{\partial T2\left(x2\right)}{\partial F}\cdot dx2 \quad (5)$$

Tabelul 1

Secțiunea	Aria de forfecare A_F	$k=\frac{A}{A_F}$
	$\frac{5}{6}\cdot b\cdot h$	$\frac{6}{5}=1,2$
	$h\cdot\left(b-b1\right)$ dacă $\frac{b1}{b}=\frac{h1}{h}=0,5$ $0,5\cdot b\cdot h$	1,5
	$\frac{9}{10}\cdot\frac{\pi\cdot D^2}{4}$	$\frac{10}{9}=1,11$
	$\frac{\pi\cdot\left(D^2-d^2\right)}{16}$	4

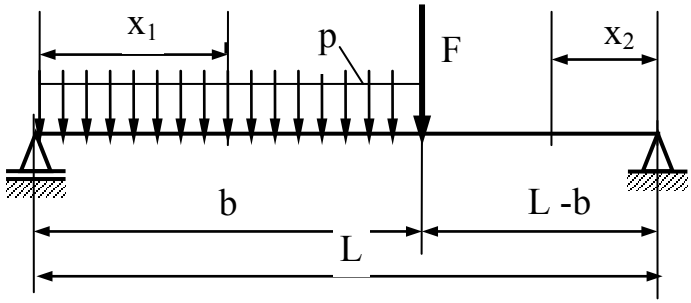


Fig. 1

Studiul grinzii simplu rezemate

Dacă se înlocuiesc expresiile momentelor încovoietoare şi a forţei tăietoare pe cele două tronsoane de calcul, se obţine :

$$\delta_F(M_i,T)=\frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^b\left[\frac{F\cdot(L-b)\cdot x1}{L}+\frac{p\cdot b}{L}\left(L-\frac{b}{2}\right)\cdot x1-\frac{p\cdot x1}{2}\right]\cdot\left[\frac{(L-b)\cdot x1}{L}\right]\cdot$$

$$dx1+\frac{1}{E\cdot I}\cdot\int_0^{L-b}\left(\frac{F\cdot b}{L}\cdot x2+\frac{p\cdot b^2}{L}\cdot x2\right)\cdot\left(\frac{b\cdot x2}{L}\right)\cdot dx2+ \qquad (6)$$

$$+\frac{k}{G\cdot A}\cdot\int_0^b\left[\frac{F\cdot(L-b)}{L}+\frac{p\cdot b}{L}\left(L-\frac{b}{2}\right)-p\cdot x1\right]\cdot\left[\frac{(L-b)}{L}\right]\cdot dx1$$

$$+\frac{k}{G\cdot A}\cdot\int_0^{L-b}\left(\frac{-F\cdot b}{2}-\frac{p\cdot b^2}{2\cdot L}\right)\cdot\left(\frac{-b}{L}\right)dx2$$

Efectuând calculul integralelor şi grupând termenii rezultă:

$$\delta_F(M_i,T)=\frac{1}{24}\cdot\frac{b^2}{L}\cdot\frac{\left(3\cdot p\cdot b^3-7\cdot p\cdot b^2\cdot L-16\cdot F\cdot L\cdot b+8\cdot F\cdot b^2+8\cdot F\cdot L^2+4\cdot p\cdot b\cdot L^2\right)}{E_m\cdot I}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{(2\cdot F\cdot L-2\cdot F\cdot b+p\cdot b\cdot L-p\cdot b\cdot L)}{G\cdot A} \qquad (7)$$

Din relaţia (7) se poate scrie expresia deplasării din secţiunea de aplicare a forţei F dacă se ia în considerare numai efectul momentului încovoietor $\delta_F(M_i)$:

$$\delta_F(M_i)=\frac{1}{24}\cdot\frac{b^2}{L}\cdot\frac{\left(3\cdot p\cdot b^3-7\cdot p\cdot b^2\cdot L-16\cdot F\cdot L\cdot b+8\cdot F\cdot b^2+8\cdot F\cdot L^2+4\cdot p\cdot b\cdot L^2\right)}{E_m\cdot I}$$

(8), respectiv deplasarea produsă numai de forţa tăietoare $\delta_F(T)$.

$$\delta_F(T)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{\left(2\cdot F\cdot L-2\cdot F\cdot b+p\cdot b\cdot L-p\cdot b^2\right)}{G\cdot A} \qquad (9)$$

3. Exemplu de aplicare a metodei

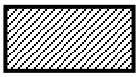
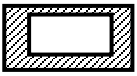
Se vor considera grinzi drepte solicitate la încovoiere, având modul de încărcare rezemare ca cel din figura 1, având diferite forme ale secţiunilor transversale ca: dreptunghiulară, tubulară dreptunghiulară circulară, tubulară circulară.

Pentru fiecare formă a secţiunii transversale se vor considera 10 tipuri de grinzi care au raportul dintre înălţimea h a secţiunii şi lungimea L a elementului de rezistenţă cu valori cuprinse între 0,3 ≤ h/L ≤ 1,4. La toate aceste grinzile s-au menţinut aceleaşi condiţii de încărcare/rezemare.

Pentru toate formele secţiunilor s-au calculat valorile deplasărilor, acestea fiind comparate pentru toate grinzile care au raportul h/L de aceeaşi valoare.

Rezultatele calculului deformaţiilor pentru aceste grinzi sunt prezentate în tabelul 2, fiind utilizate relaţiile (7), (8), (9).

Tabelul 2

$\frac{h}{L}$	Valorile deplasărilor în dreptul forţei pentru diferite forme ale secţiunilor [mm]					
						
	$\delta_F(M_i,T)$	$\delta_F(M_i)$	$\delta_F(T)$	$\delta_F(M_i,T)$	$\delta_F(M_i)$	$\delta_F(T)$
1,4	0,145	0,090	0,056	0,175	0,092	0,083
1,2	0,242	0,167	0,076	0,283	0,171	0,112
1,0	0,454	0,346	0,109	0,517	0,355	0,162
0,9	0,661	0,527	0,134	0,740	0,541	0,200
0,8	1,014	0,844	0,170	1,119	0.866	0,253
0,7	1,661	1,439	0,222	1,808	1,477	0,331
0,6	2,969	2,666	0,302	3,186	2,736	0,450
0,5	5,964	5,529	0,435	6,322	5,674	0,648
0,4	14,17	13,49	0,68	14,866	13,853	1,012
0,3	43,87	42,66	1,209	45,583	43,783	1,799

$\frac{h}{L}$						
	$\delta_F(M_i,T)$	$\delta_F(M_i)$	$\delta_F(T)$	$\delta_F(M_i,T)$	$\delta_F(M_i)$	$\delta_F(T)$
1,4	0,109	0,076	0,033	0,239	0,081	0,157
1,2	0,186	0,141	0,045	0,365	0,151	0,214
1,0	0,357	0,293	0,064	0,621	0,313	0,308
0,9	0,526	0,447	0,079	0,857	0,477	0,380
0,8	0,816	0,716	0,100	1,245	0,764	0,481
0,7	1,353	1,222	0,131	1,932	1,303	0,628
0,6	2,442	2,263	0,178	3,27	2,414	0,855
0,5	4,950	4,693	0,267	6,238	5,006	1,232
0,4	11,859	11,458	0,401	14,146	12,222	1,925
0,3	36,926	36,213	0,713	42,049	38,627	3,421

Comparând valorile deformaţiilor pentru grinzile studiate s-au calculat ponderea deformaţiilor produse numai de forţa tăietoare $\delta_F(T)$, respectiv a celor produse numai de momentul încovoietor $\delta_F(M_i)$, din deformaţiile produse de momentul încovoietor şi forţa tăietoare acţionând simultan $\delta_F(M_i,T)$, utilizând relaţiile (10):

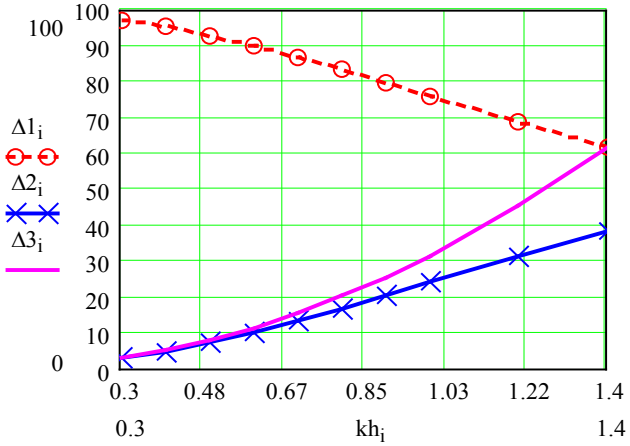


Fig. 2

Diagramele de variație ale ponderilor pentru secțiunea dreptunghiulară

$$\Delta 1_i = \frac{\delta_F(M_i)}{\delta_F(M_i,T)} \cdot 100 \;;\; \Delta 2_i = \frac{\delta_F(T)}{\delta_F(M_i,T)} \cdot 100 \;;\; \Delta 3_i = \frac{\delta_F(T)}{\delta_F(M_i)} \cdot 100 \qquad (10)$$

Diagramele de variaţie ale ponderilor $\Delta 1_i = f\left(h/L\right)$, $\Delta 2_i = f\left(h/L\right)$, $\Delta 3_i = f\left(h/L\right)$ pentru cele 4 variante ale secţiunilor transversale ale grinzilor studiate sunt redate în figurile 2, 3, 4 și 5.

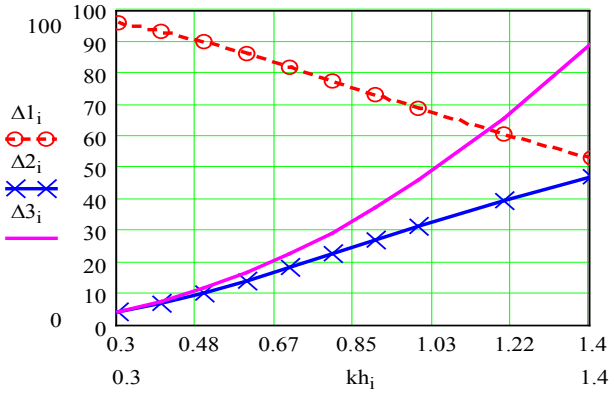


Fig. 3

Diagramele de variație ale ponderilor pentru secțiunea tubulară dreptun-ghiulară

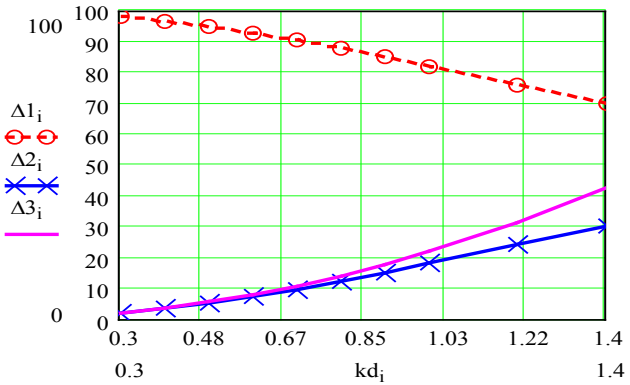


Fig. 4

Diagramele de variație ale ponderilor pentru secțiunea circulară

4. Concluzii

Analizând valorile deplasărilor în dreptul forţei concentrate pentru diferite forme ale secţiunilor, se pot concluziona următoarele:

■ pentru valori crescătoare ale raportului h/L, ponderea deplasării $\delta_F(M_i)$ produse de momentul încovoietor M_i, scade în comparaţie cu valoarea deplasării $\delta_F(M_i,T)$ produsă de cele două eforturi T şi M_i.

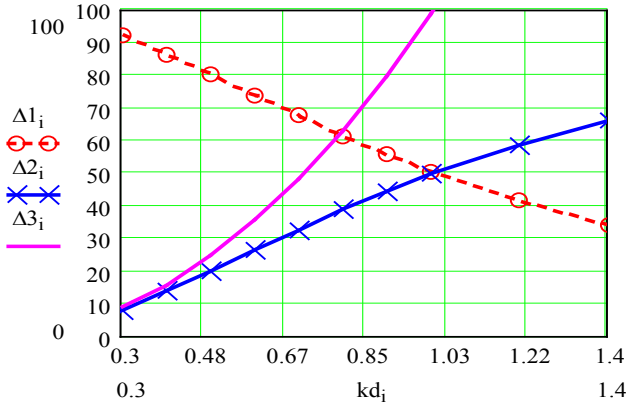


Fig. 5

Diagramele de variație ale ponderilor pentru secțiunea tubulară circulară

■ valoarea deplasării δ_F (T) produsă numai de forţa tăietoare creşte semnificativ la creşterea valorii raportului h/L.

■ pentru aceeaşi valoare a raportului h/L, cea mai semnificativă creştere a valorii deplasării δ_F(T) se constată în cazul secţiunilor tubulare şi în special pentru secţiunea circulară tubulară.

■ pentru secţiunile pline ale grinzilor care au valori mai mari ale raportului h/L ≥ 0,6 valoarea deplasării δ_F(T) produsă numai de forţa tăietoare nu poate fi neglijată.

■ pentru secţiunile tubulare ale grinzilor care au valori mai mari ale raportului h/L ≥ 0,4 valoarea deplasării δ_F(T) produsă numai de forţa tăietoare trebuie luată în considerare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bejan, M., *Rezistenţa materialelor*, vol. I, ediția a V-a, Editura AGIR, Bucureşti și Editrura Mega, Cluj Napoca, 2009.
[2] Spzrakos, C., *Finite Element Modeling in Engineering Practice* – West Virginia University 1996.
[3] Tripa, M., *Rezistenţa materialelor*, Editura didactică și pedagogică, București, 1967.
[4] Posea, N., *Rezistenţa materialelor*, Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
[5] Buzdugan, Gh., *Rezistenţa materialelor*, Editura tehnică, Bucureşti, 1986.
[6] Gherman, Gh.A., *Rezistenţa materialelor*, Editura Mirton, Timișoara, 2003.

Prof. univ. Dr. Ing. Gheorghe Aurel GHERMAN
Departamentul AAMR - DP, Universitatea Aurel Vlaicu din Arad,
preşedintele Sucursalei Arad a AGIR