A XIV-a Conferinţă internaţională – multidisciplinară,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti",
SEBEŞ, 2014

ABORDAREA LOGISTICĂ A SISTEMELOR DINAMICE NELINIARE

George MAHALU, Radu PENTIUC

LOGISTIC APPROACH OF THE NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

This paper deals with the analyse of the nonlinear dynamic systems treated under logistic map formalism. Also, a new method of chaos behaviour investigation is treated, through the dynamic logistic map theory. Some results of Matlab simulation analysis has been presented.

Keywords: nonlinear system, logistic map, chaos, parameter, attractor
Cuvinte cheie: sistem neliniar, hartă logistică, haos, parametru, atractor

1. Introducere

Sistemele dinamice sunt descrise prin intermediul formalismului intrare-stare-ieşire, ca set de ecuaţii diferenţiale de ordin unu. Alegerea stărilor sistemului constituie actul de modelare în urma căruia modelul creat urmează a fi verificat.

În cazul sistemelor descrise prin hartă logistică acest lucru este posibil prin derivarea succesivă a ecuaţiei logistice.

Vom considera ecuaţia logistică clasică. Reprezentarea în timp continuu este de forma:

$$\dot{x} = rx(1-x) \tag{1}$$

Ecuaţia în timp discret se scrie:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k) \tag{2}$$

Se obţine o relaţie iterativă care, iterată pe domeniul $(2.9,4)$ al parametrului de control r, conduce la aşa numita *hartă logistică* (figura 1).

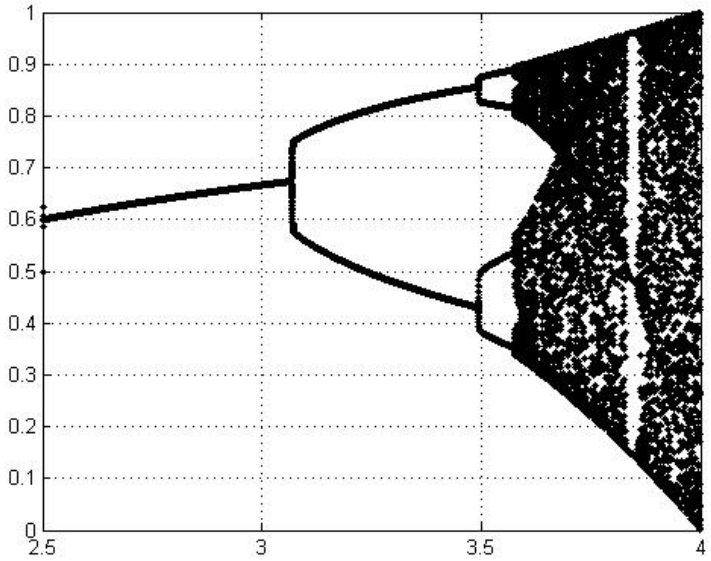

Fig.1 Harta logistică

2. Harta logistică

Parametrul de control al hărţii logistice este un factor hotărâtor asupra căii evolutive a procesului sistemic. Acest lucru se datorează, pe de o parte, impredictibilităţii intrinseci implicate de structura matematică a sistemului, iar pe de altă parte caracteristicii esenţiale a oricărui sistem cu comportament haotic: sensibilitatea la stările iniţiale.

Dacă privim relaţia iterativă (2) observăm că atât x_k cât şi x_{k+1} pot căpăta valori doar în intervalul $(0,1)$, sau altfel spus, mărimile respective sunt subunitare. Deoarece considerăm intervalul specificat ca fiind un interval deschis, nu vom avea (cel puţin din punct de vedere teoretic) situaţii de singularitate.

În aceste condiţii, apar două subiecte de studiu importante ce merită a fi analizate:

- domeniul admisibil de valori pentru parametrul de control al hărţii logistice;
- efectul regiunii inferioare a domeniului admisibil de valori al lui r asupra hărţii logistice.

Problema domeniului admisibil de valori pentru parametrul de control cere să se determine acel interval de valori ale lui r pentru care membrul drept al relaţiei (2) rămâne subunitar.

Revenind la relaţia (1) şi considerând funcţia:

$$f(x) = x(1-x) \tag{3}$$

ne întrebăm care este valoarea sa maximă f_{max}, astfel încât să putem scrie:

$$r_{max} f_{max} = 1 \tag{4}$$

sau:

$$r_{max} = 1 / f_{max} \tag{5}$$

Avem:

$$r \in (0, r_{max}) \tag{6}$$

Valoarea lui r_{max} poate fi dedusă ca soluţie la o problemă de extrem. Condiţia de extrem a funcţiei $f(x)$ în raport cu variabila x este:

$$x'(1-x) - xx' = 0 \tag{7}$$

sau:

$$x = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Cu această valoare, maximul funcţiei se găseşte ca fiind:

$$f_{max} = f(1/2) = \frac{1}{4} \tag{9}$$

Atunci, în virtutea relaţiei (5), obţinem:

$$r_{max} = 4 \tag{10}$$

Pentru valori ale parametrului de control situate peste limita de mai sus, răspunsul sistemului nu mai este doar impredictibil ci şi incontrolabil. Literatura de specialitate utilizează această limită superioară pentru parametrul de control fără a face, însă, o analiză detaliată a semnificaţiei şi implicaţiei sale în comportamentul evolutiv al sistemului.

Cel de-al doilea subiect de studiu nu este tratat în literatura de specialitate, aşa încât analiza sa în acest context poate fi considerată originală.

Se constată că pentru valoarea iniţială 0.5 a lui x şi respectiv r, harta logistică arată ca în figura 2.

Interesant este că, dacă se păstrează valoarea iniţială pentru x la cea de mai sus, însă se coboară sub o anumită limită valoarea iniţială pentru r, în harta logistică dispare pattern-ul specific, singurele stări în evoluţie fiind cele nule. În mod empiric, această limită inferioară pentru r s-a găsit a fi $\gamma = 0.34358344494515066780415679 7\ldots$

Constanta γ joacă un rol deosebit de important în definirea tipului de sistem cu comportament haotic descris prin modelul considerat. Astfel, o primă observaţie poate fi aceea că respectiva constantă indică existenţa unei “amplitudini critice”, adică a unei valori iniţiale minime pentru variabila x pentru care fenomenul numit “hartă logistică” să apară. Sub această valoare, sistemul nu se dezvoltă la pattern-ul hărţii logistice, anulând rapid amplitudinea x.

Prezenţa constantei γ în modelul matematic dezvoltat sugerează unitatea comportamentală pentru o întreagă clasă de

fenomene caracterizate prin comportament haotic, de la cele biotice până la fenomenele cosmice.

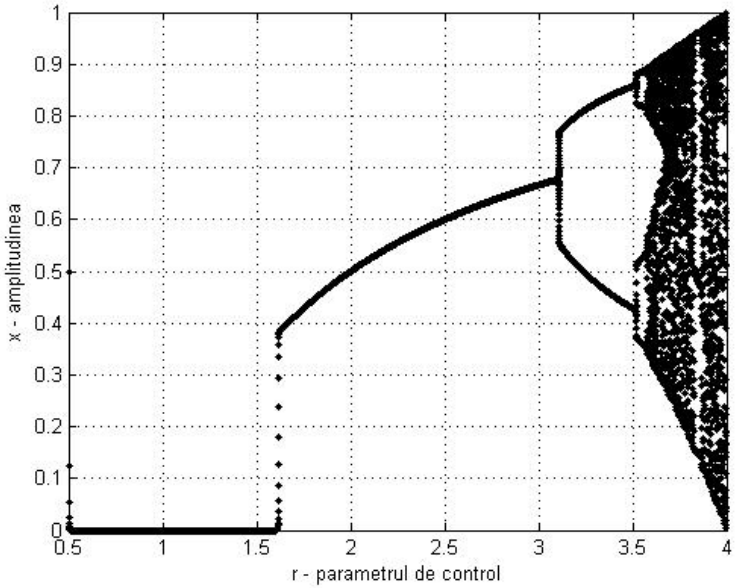

Fig. 2 Harta logistică critică

3. Harta logistică dinamică

Vom numi *hartă logistică dinamică* modelul matematic de ordin 2, care extinde cu o unitate ordinul sistemului (1).

După cum se ştie, în mecanica clasică dinamica unui sistem face referire la ansamblul informaţiilor privitoare la comportamentul sistemului atunci când pentru descrierea acestuia se utilizează mărimi fizice de tipul forţelor şi/sau acceleraţiilor. O astfel de descriere nu explică doar cinematica sistemului ci şi cauzele acesteia.

Vom începe analiza prin derivarea ecuaţiei (1). Derivata în raport cu timpul a acesteia, este:

$$\ddot{x} = r\,\dot{x}(1-2x) \tag{11}$$

Cu (1) în (11) obţinem:

$$\ddot{x} = r^2 x(1-x)(1-2x) \tag{12}$$

Considerând stările x şi $y = \dot{x}$, descrierea *i-s-e* este:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1-x) \\ \dot{y} = r^2 x(1-x)(1-2x) \end{cases} \tag{13}$$

Trecând sistemul (13) în reprezentare vectorial-matriceală, găsim:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1-x) & 0 \\ 0 & r(1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{14}$$

sau:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \tag{15}$$

unde ***u*** notează vectorul de stare iar ***A*** este matricea de evoluţie a sistemului.

Prima observaţie este aceea că sistemul este neliniar. Într-adevăr, matricea de stare este:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} r(1-x) & 0 \\ 0 & r(1-2x) \end{bmatrix} \tag{16}$$

cu proprietatea:

$$det\, \boldsymbol{A} = r^2 (1-x)(1-2x) \tag{17}$$

În figura 3 este prezentat portretul de stare al sistemului logistic dinamic. Parametrul de control este precizat prin valorile numerice ataşate traiectoriilor parametrice de stare.

Se poate observa prezenţa punctului de echilibru plasat central în cadrul figurii, punct ce caracterizează modul comportamental al sistemului.

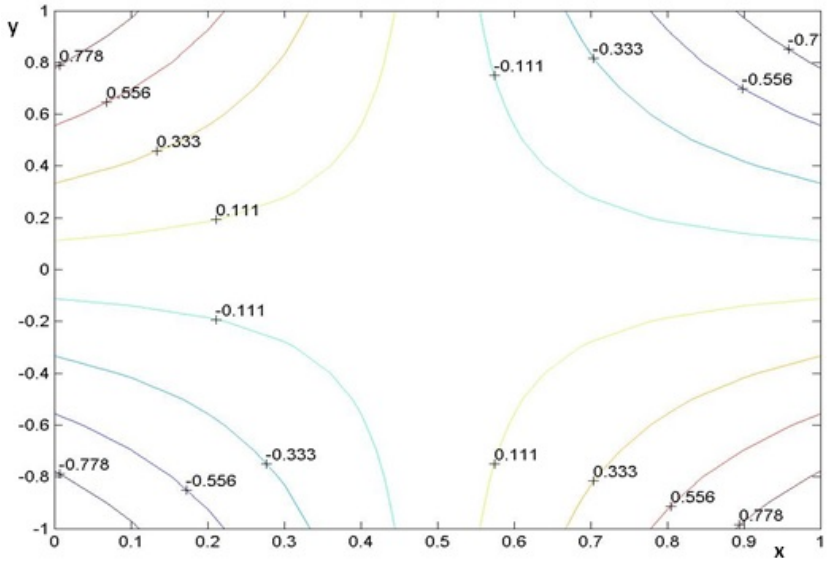

Fig. 3 Portretul de stare al hărţii logistice dinamice

Portretul de stare este de tip şea, punctul critic fiind $(0,0)$. Acest punct este un maxim pe direcţia SV-NE şi un minim pe direcţia NV-SE. Luând în considerare ca domeniu de definiţie a amplitudinii intervalul $(0,1)$, se constată că matricea A este nesingulară pentru $x \neq \frac{1}{2}$. Acest lucru semnifică faptul că sistemul logistic este determinist, în sensul posibilităţii de recuperare a stărilor iniţiale, doar în afara vecinătăţii valorii critice $x = \frac{1}{2}$. Comportamentul sistemului logistic devine imprevizibil în apropierea acestei valori şi singular în valoarea precizată.

Ca şi în cazul sistemului logistic clasic, să deducem intervalul de valori admisibile pentru parametrul de control. Pentru aceasta să definim o funcţie $f(x)$ de forma:

$$f(x) = x(1-x)(1-2x) \tag{18}$$

pentru care găsim:

$$f_{max}(x) = f(\frac{1-1/\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \approx 0.096 \tag{19}$$

$$f_{min}(x) = f(\frac{1+1/\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{6\sqrt{3}} \approx -0.096 \tag{20}$$

Aceste rezultate sugerează existenţa unei hărţi logistice dinamice simetrice în raport cu axa ordonatelor, pentru care ar urma să fie studiată o interpretare corespunzătoare cu natura concretă a sistemului modelat.

Considerând intervalul de valori acceptabile pentru funcţia $f(x)$ ca fiind (f_{min}, f_{max}), şi raţionând după acelaşi principiu ca cel exprimat prin relaţia (10), găsim:

$$r_{max}^2 = 1/|f_{max}| = 6\sqrt{3} \tag{21}$$

şi:

$$r_{max} \approx \pm 3.223 \tag{22}$$

Harta logistică dinamică este prezentată în figura 4. Ecuaţia de timp discret pentru harta logistică dinamică este:

$$x_{k+1} = r^2 x_{k-1}(1-x_{k-1})(1-2x_{k-1}) \tag{23}$$

Se constată prin simulare că pragul r_{max} depinde de valorile iniţiale ale amplitudinii şi respectiv parametrului de control. Astfel, pentru $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.3$ şi $r = 0.7$ se constată pragul $r_{max} \approx 2.294$. Acest fapt se explică prin aceea că la atingerea (pentru prima dată) a unei valori situate în vecinătatea 1/2 pentru amplitudine, valoarea de la iteraţia imediat următoare excede intervalul $(-1,1)$ pentru care sistemul este consistent.

Figura 4 denotă unele deosebiri faţă de harta logistică clasică. Astfel, *pragul de activare* a comportamentului specific este pentru cazul hărţii logistice dinamice de aproximativ 1.35, în timp ce pentru harta logistică clasică el se situează la o valoare superioară lui 1.5. De asemenea, dacă în cazul hărţii logistice clasice haosul apare la o valoare de peste 3.5 a amplitudinii, harta logistică dinamică precizează o valoare apropiată de 2.1.

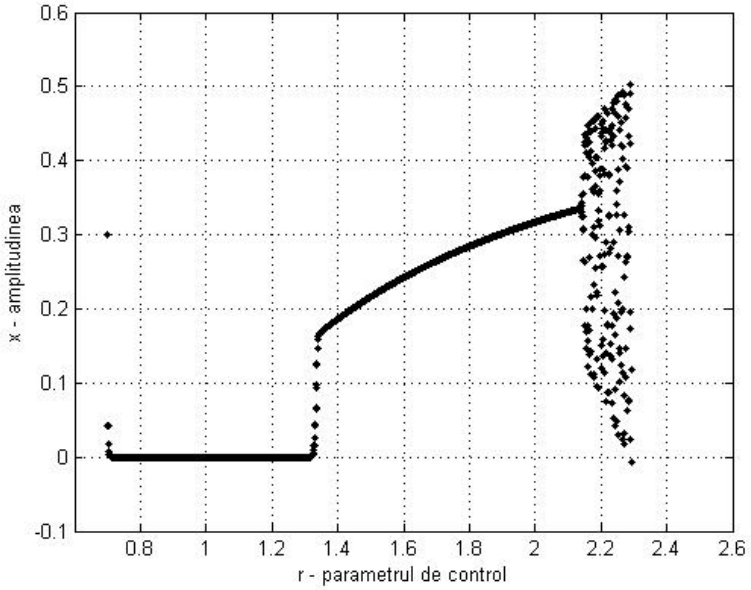

Fig. 4 Harta logistică dinamică

Dar cea mai semnificativă distincţie constă în intervalul admisibil de valori pentru amplitudine, de $(-1,1)$ pentru harta logistică dinamică şi $(0,1)$ pentru harta logistică clasică. Această deosebire face ca sistemul logistic dinamic să se îmbogăţească, din punct de vedere interpretativ, cu semnificaţii suplimentare. Considerînd exemplul clasic al evoluţiei populaţiei biotice, prezentat de Robert May, apariţia unor valori subunitare negative pentru amplitudine (nivelul populaţiei) induce informaţii despre fenomene noi (cum ar fi fenomenul de migrare), neluate în calcul în cadrul modelului clasic.

4. Concluzii

■ Deoarece majoritatea sistemelor naturale sunt sisteme dinamice neliniare, ele sunt caracterizate prin prezenţa comportamentului caracterizat prin haos determinist.

■ Sistemele logistice studiate până în prezent au avut ca model matematic formalisme dinamice de ordin unu.

■ În lucrarea prezentată se propune extinderea unor astfel de modele la formalisme de ordin doi, ceea ce implică dinamici în care acceleraţiile îşi spun cuvântul.

■ Se deschide astfel un front de studiu extrem de bogat în ceea ce priveşte modelarea matematică bazată pe harta logistică.

BIBLIOGRAFIE

[1] Mahalu, G., Turcu, C., Popa, V., *Chaos Under Magnetic Hysteresis*, Proceedings of the Joint European Magnetic Symposia – JEMS 2012, Dipartimento di Fisica, Parma, Italy, September 26-29 2012.

[2] Mahalu, G., Mahalu, Carmen, Dumistrăcel, I., *Defining the Generalized Dimension in the Analysis of Complex System*, Optimal Design of Experiments, September 25-30 2011.

[3] Mahalu, G., *Stability Areas in the Logistic Map,* Proceedings in Advanced Research in Scientific Areas for the 1st Virtual International Conference – Thomson Ltd., December 2012.

[4] Mahalu, G., *Chaos Involved by Dynamic Logistic Map,* Proceedings in Advanced Research in Scientific Areas for the 2nd Virtual International Conference – Thomson Ltd., December 2013.

[5] Mahalu, G., Pentiuc, R., *Tehnici de analiză în mecanica sistemelor complexe utilizând teoria haosului*, Ştiinţă şi Inginerie, vol.19, Editura AGIR, Bucureşti, 2011, pag.151-156.

[6] Mahalu, G., Pentiuc, R., *Consecinţe ale analizei mecanicii sistemelor complexe prin teoria haosului*, Ştiinţă şi Inginerie, vol.19, Editura AGIR, Bucureşti, 2011, pag. 157-162.

Conf.Dr.Ing. George MAHALU
Prof.Dr.Ing. Radu PENTIUC
Universitatea "Ştefan cel Mare" Suceava
membri AGIR
e-mail: mahalu@eed.usv.ro