A XV-a Conferință internațională – multidisciplinară
„Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”
SEBEȘ, 2015

DIMENSIONAREA TURBINELOR AXIALE

Ion M. CERNICA

THE DIMENSIONING OF THE AXIAL TURBINES

In this paper is presented a new method for calculating the axial hydraulic turbines, whose applicability is demonstrated by a numerical example. This method is based on the torque developed by the turbine rotor, which from reasons of simplicity, has been obtained by the $\Pi -$ theorem of dimensional analysis. Calculation results with the proposed method for the flow of small water falls are in a good accordance with those in the specialty literature. The method should be extended and verified for large and medium flow and water falling.

Keywords: turbine, rotor, method, calculation, water, hydraulic, axial

Cuvinte cheie: turbină, rotor, metodă, calcul, apă, hidraulic, axial

1. Introducere. Formularea problemei

Experienţa de peste un secol în valorificarea energiei hidraulice demonstrează că metodele existente de dimensionare a turbinelor hidraulice nu permit obţinerea unor rezultate unanim acceptate de toţi producătorii de turbine hidraulice [1-4].

Obţinerea unor rezultate palpabile ar putea fi posibilă, dacă s-ar renunţa la modelare şi metodele statistice, larg utilizate astăzi în practica proiectării turbinelor hidraulice şi s-ar recurge la metode axate pe principiile fizicii generale.

În intenţia de a îmbogăţi arsenalul metodelor de dimensionare a turbinelor cu reacţiune în flux axial, în lucrarea de faţă se propune o nouă metodă de calcul, a cărei aplicabilitate este demonstrată printr-un exemplu numeric. Metoda are la bază relaţia momentului dezvoltat de rotorul turbinei, care din raţionamente de simplitate a fost obţinută prin teorema Π a analizei dimensionale [5].

2. Calculul momentului

Experimental s-a constatat că momentul M_O, aplicat rotorului unei turbine cu reacţiune în flux axial, este funcţie de diametrul exterior D al rotorului, de viteza unghiulară ω, de debitul Q de fluid turbinat şi de densitatea ρ a fluidului [5, 6]. Transferul de energie între fluid şi turbină este influenţat deci de $n = 5$ mărimi fizice şi că momentul M_O poate fi exprimat prin funcţia

$$M_O = f(\rho,\ D,\ \omega,\ Q). \tag{1}$$

Mărimile fizice implicate în desfăşurarea procesului au dimensiunile

$$[M_O] = \mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2},\ [\rho] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M},\ [D] = \mathrm{L},\ [\omega] = \mathrm{T}^{-1},\ [Q] = \mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}.$$

Cu valorile exponenţilor conţinuţi în relaţiile de mai sus se compune matricea dimensională $\tilde{D}$ a mărimilor fizice

$$\tilde{D} = \begin{array}{c|ccccc} & M_O & \rho & D & \omega & Q \\ \hline l, & 2 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ m, & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

din care rezultă că mărimile ρ, D şi ω pot fi considerate fundamentale, deoarece determinantul asociat matricei dimensionale corespunzătoare este

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \cdot$$

Cu mărimile fundamentale ρ, D, ω şi cu una din celelalte două mărimi derivate M_O şi Q se formează două mărimi adimensionale, deoarece potrivit teoremei Π numărul acestora este $n - m = 5 - 3 = 2$,

$$\Pi_1 = \rho^{a_1} D^{a_1} \omega^{a_1} M_o,\ \Pi_2 = \rho^{a_2} D^{a_2} \omega^{a_2} Q\ . \tag{2}$$

Ecuaţiile dimensionale corespunzătoare produselor adimensionale au forma

$$\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0 = (\mathrm{L}^{-3}\mathrm{M})^{a_{11}} \cdot (\mathrm{L})^{a_{21}} \cdot (\mathrm{T}^{-1})^{a_{31}} \cdot (\mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}),$$
$$\mathrm{L}^0\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0 = (\mathrm{L}^{-3}\mathrm{M})^{a_{12}} \cdot (\mathrm{L})^{a_{22}} \cdot (\mathrm{T}^{-1})^{a_{32}} \cdot (\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}).$$

Pentru ca ecuaţiile scrise să fie omogene dimensional, este necesar ca fiecare din ele să conducă la câte un sistem omogen de trei ecuaţii liniare, cu tot atâtea necunoscute,

$$\left.\begin{aligned} -3a_{11} + a_{21} + 2 = 0, \\ a_{11} + 1 = 0, \\ -a_{31} - 2 = 0, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \left.\begin{aligned} -3a_{12} + a_{22} + 3 = 0, \\ a_{12} = 0, \\ -a_{32} - 1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

care admit soluţia $a_{11} = a_{32} = -1,\ a_{12} = 0,\ a_{21} = -5,\ a_{22} = -3,$ $a_{31} = -2$.

Înlocuind valorile exponenţilor în relaţiile celor două produse adimensionale, se obţine:

$$\Pi_1 = \frac{M_O}{\rho D^5 \omega^2},\ \Pi_2 = \frac{Q}{D^3 \omega}. \tag{4}$$

Relaţia criterială a procesului de schimb de energie între fluid şi turbină are forma

$$\Phi\left(\Pi_1, \Pi_2\right) = 0 \tag{5}$$

sau

$$\Phi\left(\frac{M_O}{\rho D^5 \omega^2}, \frac{Q}{D^3 \omega}\right) = 0. \tag{6}$$

Explicitând ultima ecuaţie în raport cu primul argument, se obţine

$$\frac{M_O}{\rho D^5 \omega^2} = \Psi\left(\frac{Q}{D^3 \omega}\right) \tag{7}$$

şi de aici

$$M_O = \rho D^5 \omega^2 \Psi\left(\frac{Q}{D^3 \omega}\right). \tag{8}$$

Se demonstrează deci că momentul M_O aplicat rotorului unei turbine cu reacţiune în flux axial este proporţional cu diametrul exterior D al rotorului la puterea a cincea. Dacă se schimbă debitul turbinat, diametrul rotorului şi viteza lui unghiulară astfel ca valoarea produsului de puteri dintre paranteze să rămână nemodificată, momentul este proporţional cu pătratul vitezei unghiulare şi cu densitatea fluidului.

Precizări importante privind expresia (8) se pot obţine, dacă se ţine seama şi de alte consideraţii, specifice problemei studiate. Cum produsul adimensional $\dfrac{Q}{D^3 \omega}$ este unica variabilă de care depinde funcţia Ψ, pare normal să se admită, într-o primă aproximaţie, că mărimea $\dfrac{Q}{D^3 \omega}$ este un factor. În cazul particular considerat, expresia (8) ia forma

$$M_O = \rho D^5 \omega^2 \cdot \frac{Q}{D^3 \omega} = \rho D^2 \omega Q \,. \tag{9}$$

Relaţia (9) reflectă calitativ corect influenţa variabilelor dimensionale ρ, D, ω şi Q asupra momentului M_O. Din punctul de vedere al analizei dimensionale, această relaţie este scrisă corect. Se poate deci afirma că relaţia astfel dedusă reprezintă expresia momentului aplicat rotorului unei turbine cu reacţiune în flux axial.

3. Dimensionarea rotorului

A dimensiona rotorul unei turbine hidraulice înseamnă a găsi prin calcule dimensiunile principale ale acestuia: diametrul exterior D, diametrul d al butucului considerat cilindric şi diametrul arborelui d_a (figura 1).

De regulă, principalele mărimi caracteristice care se impun la proiectarea unei turbine hidraulice axiale sunt căderea netă H, viteza unghiulară ω şi puterea P, definită cu relaţia cunoscută

$$P = \rho g H Q \eta \,, \tag{10}$$

în care η este randamentul turbinei.

Momentul dezvoltat de rotor este

$$M_O = \frac{P}{\omega} \tag{11}$$

sau

$$M_O = \frac{\rho g H Q \eta}{\omega} \,. \tag{12}$$

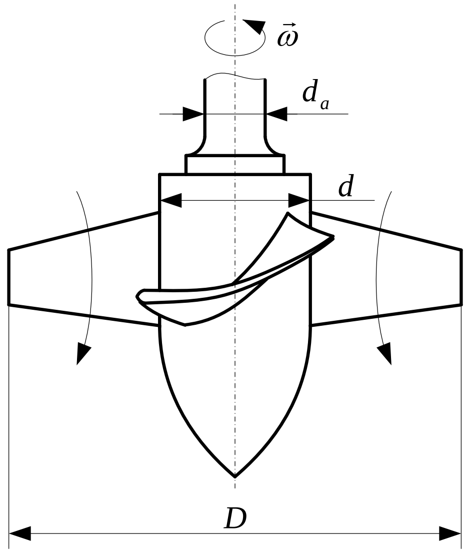

Fig. 1 Rotorul unei turbine cu reacţiune în flux axial

Evident, momentele calculate cu relaţiile (9) şi (12) trebuie să fie egale, adică

$$\frac{\rho g H Q \eta}{\omega} = \rho D^2 \omega Q \; , \tag{13}$$

de unde rezultă relaţia pentru diametrul exterior al rotorului

$$D = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{g H \eta} \; . \tag{14}$$

Astfel se deduce că diametrul rotorului turbinei axiale este direct proporţional cu căderea netă H şi invers proporţional cu viteza unghiulară ω.

Prin analogie cu pompele hidraulice, viteza meridională a apei în spaţiul interpaletar al rotorului turbinei axiale se poate determina cu formula lui Toricelli, multiplicată cu un factor de corecţie C, numit coeficient de viteză [5]. Deci:

$$v_m = C\sqrt{2gH\eta} \,. \tag{15}$$

Potrivit aceleiaşi surse bibliografice [5], coeficientul de viteză se poate calcula cu relaţia

$$C = 0,79 + 1,61 \cdot 10^{-3} \cdot n_s \,, \tag{16}$$

unde n_s este turaţia specifică, exprimată în unităţi SI.

În continuare, se scrie ecuaţia continuităţii

$$Q = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) \cdot v_m \,, \tag{17}$$

din care rezultă diametrul butucului

$$d_{\max} = \sqrt{D^2 - \frac{4Q}{\pi v_m}} \,, \tag{18}$$

debitul turbinat fiind

$$Q = \frac{P}{\rho g H \eta} \,. \tag{19}$$

Diametrul butucului calculat cu relaţia (18) este un diametru maxim, peste care funcţionarea rotorului poate fi periclitată. Dacă se ţine seama de această ultimă relaţie, precum şi de (15), relaţia pentru diametrul butucului (18) poate fi pusă sub forma

$$d_{\max} = \sqrt{D^2 - \frac{4P}{\pi \rho g H \eta \sqrt{2gkH}}} \,. \tag{20}$$

În ipoteza că arborele rotorului este solicitat la tensiuni de torsiune, diametrul lui este

$$d_a \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi\left[\tau\right]}}, \tag{21}$$

unde $\left[\tau\right]$ este tensiunea tangenţială admisibilă a materialului arborelui.

4. Aplicaţie

În cele ce urmează, se prezintă calculul de dimensionare al rotorului unei microturbine Kaplan cu puterea $P = 1{,}5\ \text{kW}$, pentru care se specifică o cădere netă de apă $H = 2{,}25\ \text{m}$ şi o viteză unghiulară a rotorului $\omega = 18{,}84\ \text{s}^{-1}$, turaţia fiind deci $n = 180\ \text{min}^{-1}$.

Considerând pentru randamentul microturbinei o valoare optimă $\eta = 0{,}90$ [3], debitul turbinat, conform relaţiei (18), este

$$Q = \frac{P}{\rho g H \eta} = \frac{1500}{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}25 \cdot 0{,}90} = 7{,}55 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{s} \cdot$$

Momentul la arborele rotorului este

$$M_O = \frac{P}{\omega} = \frac{1500}{18{,}84} = 79{,}618\ \text{Nm} \cdot$$

Diametrul exterior al rotorului calculat cu relaţia (14) este

$$D = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{gH\eta} = \frac{1}{18{,}84} \cdot \sqrt{9{,}81 \cdot 2{,}25 \cdot 0{,}90} = 0{,}237\ \text{m} \cdot$$

Turaţia specifică se poate calcula cu relaţia cunoscută [1]

$$n_s = n\frac{P^{0,5}}{H^{1,25}} = 180 \cdot \frac{1,5^{0,5}}{2,25^{1,25}} = 80\ \mathrm{kW}^{0,5}\mathrm{m}^{-1,25}.$$

Coeficientul de viteză calculat cu relaţia (16) are valoarea

$$C = 0,79 + 1,61 \cdot 10^{-3} \cdot n_s = 0,79 + 1,61 \cdot 10^{-3} \cdot 80 = 0,9188 \approx 0,92,$$

cu care pentru viteza meridională se obţine

$$v_m = C\sqrt{2gH\eta} = 0,92 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,25 \cdot 0,90} = 5,80\ \mathrm{m/s}.$$

Diametrul maxim al butucului, potrivit relaţiei (20), este

$$d_{\max} = \sqrt{D^2 - \frac{4Q}{\pi v_m}} = \sqrt{0,237^2 - \frac{4 \cdot 7,55 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 5,80}} = 0,198\ \mathrm{m}\cdot$$

Dacă pentru raportul dintre diametrul butucului şi diametrul exterior al rotorului se specifică o valoare de $0,5$, se obţine $d = 0,5D = 0,5 \cdot 0,237 = 0,119\ \mathrm{m} \approx 0,12\ \mathrm{m}$.

Considerând tensiunea admisibilă a oţelului $[\tau] = 15\ \mathrm{N/mm^2}$, diametrul arborelui, conform relaţiei (21), este

$$d_a \ge \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 79,618}{3,14 \cdot 15 \cdot 10^6}} = 0,03001\,\mathrm{m} \approx 30\ \mathrm{mm}.$$

5. Concluzii

■ În încheiere se poate spune că rezultatele obţinute prin metoda propusă se află în bună corespundere cu cele existente în literatura de specialitate [1, 4, 5, 7].

■ Pentru generalizare, metoda trebuie extinsă şi verificată în domeniul căderilor şi debitelor de apă mari şi mijlocii.

BIBLIOGRAFIE

[1] Anton, V., Popoviciu, M., Fitero, I., *Hidraulica şi maşini hidraulice*, Editura Ştiinţa, Chişinău, 1991, 448 p.
[2] Cernica, I.M., *Bazele fizice ale analizei dimensionale: Aplicaţii şi sisteme de unităţi*, Editura AGIR, Bucureşti, 2014, 195 p.
[3] Georgescu, A.-M., Georgescu, S.-C. *Hidraulica reţelelor de conducte şi maşini hidraulice*, Editura Printech, Bucureşti, 2007, 294 p.
[4] Kenyery, F., Rey, R. and Noguera R., *Dimensioning and performance analysis of an axial hydraulic turbine of high power/weight ratio*, Tack Quarterly, 2002, vol. 6, no. 4, pp. 609-620.
[5] Nava Mastache, Arturo., *Selección y dimensionamiento de turbinas hidráulicas para centrales hidroélectricas*, México, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013, 113 p.
[6] Pavel, D*., Contribuţie la alegerea metodelor de dimensionare a turbinelor hidraulice*, Energetica, 1964, nr. 7, p. 301-310.
[7] Péres, M.-A.-G., *Turbomáquinas – turbinas hidráulicas,* Callao, Universidad Nacional del Callao, 2011, 129 p.

Conf. Dr. Ing. Ion M. CERNICA
Facultatea de Energetică şi Inginerie Electrică
Universitatea Tehnică a Moldovei
e-mail: ion_cernica@yahoo.com