



A XV-a Conferință internațională – multidisciplinară
„Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”
SEBEȘ, 2015

INFLUENȚA EFECTULUI TERMIC ASUPRA FRECVENȚELOR PROPRII ALE GRINZILOR ÎNCASTRATE LA AMBELE CAPETE

Horea FURDUI, Gilbert-Rainer GILLICH, Andrea Amalia MINDA

THE EFFECT OF THERMAL LOAND ON THE NATURAL FREQUENCIES OF DOUBLE-CLAMPED BEAMS

The natural frequencies of double-clamped beams are influenced by environmental conditions and operational loads. For instance the temperature induces axial loads due to restraint displacements, which lead after a critical temperature increase to buckling. This paper clarifies the effect of external loads on the natural frequencies of beams.

Keywords: thermal loads, buckling, Euler-Bernoulli beam, natural frequency
Cuvinte cheie: încărcări termice, flambaj, grindă, frecvențe proprii

1. Introducere

Pentru obținerea parametrilor modali, în literatura de specialitate sunt indicate modele bazate pe zveltețe [1-3], pe variația ariei transversale [4] sau pe defect [5-8]. Intre acestea sunt puține cele care țin cont și de sarcinile operaționale [9]. Efectul temperaturii asupra frecvențelor proprii ale structurilor intacte sau cu defect este prezentat în [10-11].

În studiile anterioare s-a obținut o relație matematică capabilă să permită determinarea frecvenței proprii ale unei grinzi cu defect, elaborându-se astfel o metodă pe baza căreia se poate stabili poziția defectului [12-16]. Prezenta lucrare este un studiu al efectului pe care îl

are modificarea temperaturii asupra frecvențelor proprii, realizându-se dezvoltarea unei metode care să permită detectarea de defecte, ținând cont și de influența modificărilor de temperatură.

2. Efectul flambajului asupra grinzilor

În această lucrare se consideră o grindă încastrată la ambele capete de lungime L , lățime b și înălțime h , densitate ρ la temperatura inițială T_0 . Dacă are loc o modificare ΔT de temperatură, apare o încărcare internă dată de:

$$P(T) = \alpha \cdot E \cdot A \cdot (T - T_0) = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta T \quad (1)$$

unde A este aria secțiunii transversale, E este modulul de elasticitate longitudinală, iar α este coeficientul de dilatare termică. Când este atinsă prima temperatură critică T_{cr-1} atunci apare prima forță critică de flambaj P_{cr-1} și structura suferă o deplasare verticală așa cum se poate vedea în figurile 1 și 2.

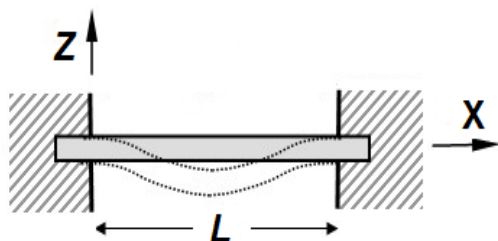


Fig. 1 Grinda dublu încastrată în stare inițială și cu evidențierea deformației datorată flambajului (primul mod)

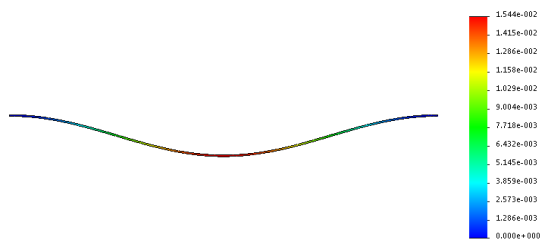


Fig. 2 Grinda în primul mod de flambaj

Ecuția grinzii deformată datorită flambajului este:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^4 v}{dx^4} + \zeta^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

unde v este săgeata și ζ este valoarea proprie de flambaj.

Soluția acestei ecuații este de forma [17]:

$$v(x) = c_1 \sin(\zeta x) + c_2 \cos(\zeta x) + c_3 x + c_4 \quad (3)$$

unde coeficienții c_1, \dots, c_4 se determină prin impunerea condițiilor specifice. Pentru cazul analizat, acela al grinzii dublu încastrate obținem valorile proprii din ecuația:

$$\zeta \sin \zeta + 2 \cos \zeta - 2 = 0 \quad (4)$$

Primele 6 valori proprii de flambaj sunt prezentate în tabelul 1

Tabelul 1

Modurile simetrice de flambaj	Valori proprii	Modurile asimetrice de flambaj	Valori proprii
1	6,2831853071	2	8,9868189158
3	12,566370614	4	15,450503673
5	18,849555921	6	21,808243318

Valoarea locală a formei modului de vibrație i pentru un punct oarecare x pe grindă este dată de funcția:

$$v_i(x) = c \left\{ 1 - \cos\left(\zeta_i \frac{x}{L}\right) - \left[\sin\left(\zeta_i \frac{x}{L}\right) - \zeta_i \frac{x}{L} \right] \frac{1 - \cos \zeta_i}{\sin \zeta_i - \zeta_i} \right\} \quad (5)$$

Forța critică se calculează astfel:

$$P_{cr-i} = \frac{\zeta_i^2 E \cdot I}{L^2} \quad (6)$$

iar temperatura critică este dată de:

$$T_{cr-i} = T_0 + \Delta T_{cr} = T_0 + \frac{P_{cr-i}}{\alpha \cdot E \cdot A} \quad (7)$$

Numim această temperatură critică deoarece în aceste puncte frecvența devine nulă și de la acest punct începând rigiditatea aparentă crește. La temperaturi negative P scade și frecvența crește. Frecvența este dată de relația:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A} - \frac{P}{\rho A} \left(\frac{L^2}{\zeta_i^2} \right)} \quad (8)$$

unde λ_i este numărul de undă adimensional pentru modul i .

S-au determinat analitic valorile pentru forța critică și pentru temperatura critică pentru o grindă de oțel, încastrată la ambele capete, având lungimea $L = 1200$ mm, lățimea $b = 50$ mm, grosimea $h = 5$ mm

momentul de inerție $I = 520,8(3) \text{ mm}^4$, modulul de elasticitate longitudinală $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, coeficientul lui Poisson $\mu = 0,3$, densitatea $\rho = 7850 \cdot 10^9 \text{ kg/mm}^3$ și coeficientul de dilatare termică $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$. Rezultate obținute sunt sintetizate în tabelul 2.

3. Analiza cu elemente finite

Cu ajutorul softului *SolidWorks* s-a realizat analiza cu element finit asupra unei grinzi de oțel cu caracteristicile prezentate în paragraful 2. În modulul *Thermal analysis* s-a realizat o analiză termică pentru temperaturi în domeniul $0..100 \text{ }^\circ\text{C}$, considerând temperatura de referință ca fiind $24,85 \text{ }^\circ\text{C}$. Apoi comparăm temperaturile critice obținute din analiză cu cele calculate analitic (tabelul 2).

Comparând datele din tabelul 2 se observă că valorile forțelor critice de flambaj și a temperaturilor critice obținute analitic sunt similare cu cele obținute prin analiză cu element finit.

Tabelul 2

Modul	Forța critică		Temperatura critică	
	Analic	FEM	Analic	FEM
	[N]	[N]	[°C]	[°C]
1	2855,79	2857,47	29,8	29,8
2	5842,22	5846,48	35,01	35,01
3	11423,1	11440,6	44,71	44,74
4	17268,3	17301,3	54,88	54,94
5	25702,1	25776,3	69,54	69,68
6	34403,9	34523,2	84,68	84,89

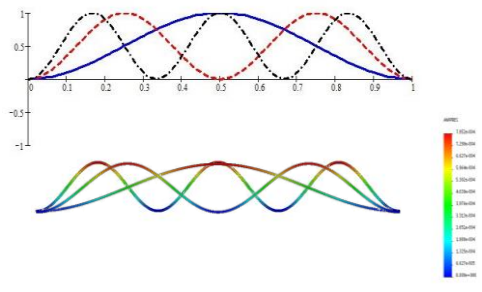


Fig. 3 Forma de flambaj pentru modurile simetrice obținute analitic, respectiv prin analiza cu element finit

În figura 3 s-a reprezentat grafic modurile de flambaj pentru modurile simetrice mai întâi cele obținute analitic apoi cele obținute din programul de simulare. În mod analog, în figura 4 am reprezentat modurile asimetrice de flambaj. Comparând figurile 3 și 4 se observă că

modurile de flambaj obținute analitic sunt similare cu cele obținute din analiza cu elemente finite.

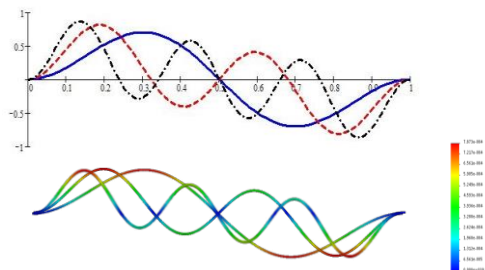


Fig. 4 Forma de flambaj pentru modurile asimetriche obținute analitic, respectiv prin analiza cu elemente finite

În continuare s-a realizat o analiză în care considerăm temperaturi în intervalul 0...100 °C, mergând din 5 în 5 °C în intervalul 0...24,85 °C și apoi, pentru temperaturi mai mari decât temperatura de referință, vom considera temperaturi cu un pas de 1 °C.

În figura 5 se prezintă variațiile frecvențelor obținute prin analiză modală pentru primele șase moduri de vibrație transversale, putându-se remarca o bună asemănare cu cele din [18]. Astfel, frecvența scade odată cu creșterea temperaturii până apare flambajul în acel mod. După acest punct frecvența crește datorită contribuției rigidității aparente.

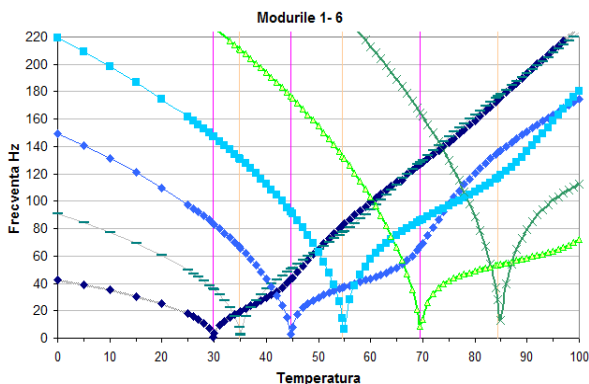


Fig. 5 Variațiile frecvențelor pentru modurile 1-6

Valorile frecvențelor obținute analitic pentru modul trei de vibrație pentru starea de dinainte de flambaj sunt reprezentate grafic în figura 6. De asemenea s-a trasat cu linie continuă graficul frecvențelor obținute din programul de simulare pentru temperaturi situate între 25 °C și 45 °C.

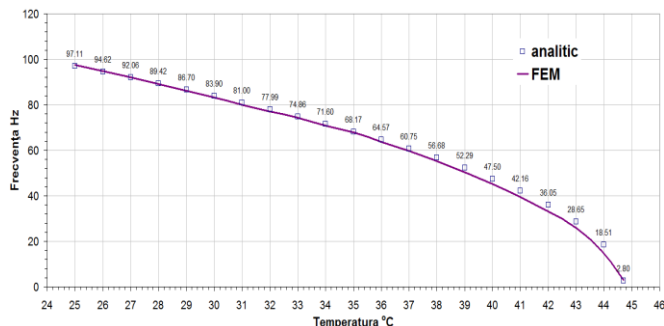


Fig. 6
Scăderea
frecvenței
datorită
compresiei
pentru modul
trei de vibrație

Trebuie menționat aici că forma modului de vibrație este diferită de cea clasică din cauza efectului termic și a dilatării.

4. Testarea indicatorului poziției defectului pentru grinda cu flambaj

Analizând distribuția frecvențelor în funcție de poziția defectului și în funcție de adâncimea acestuia se poate trage concluzia că reducerea rigidității într-un segment transversal nu duce automat la modificarea frecvențelor. Astfel, putem spune că defecte situate în două poziții diferite influențează diferit frecvența pentru un anumit mod de vibrație. Pe de altă parte, defectul este situat în aceeași poziție influențează în mod diferit modurile diferite de vibrație. Pe baza acestor observații s-a elaborat un model matematic și un algoritm care să permită identificarea poziției defectului într-o grindă. Astfel, frecvența proprie a grinzii cu defect transversal deschis este [12]:

$$f_{i_D}(x_D, a) = f_{i_U}(1 - \gamma(a))(\bar{\phi}_i''(x_D))^2 \quad (9)$$

unde f_{i_D} este frecvența grinzii cu defect, f_{i_U} este frecvența grinzii fără defect, $\gamma(a)$ este o mărime care caracterizează severitatea defectului, $i = 1 \dots n$ este numărul modurilor de vibrație, iar n este numărul modului de vibrație considerat. Curbura normalizată a formei modului de vibrație în x_D se notează cu $\bar{\phi}_i''(x_D)$.

Dacă considerăm un set de frecvențe măsurate, putem calcula modificările relative ale frecvențelor cu ajutorul următoarei relații:

$$\delta f_i(x, a) = \frac{f_{i_U} - f_{i_D}(x, a)}{f_{i_U}} \quad (10)$$

Normalizând aceste valori prin împărțirea lor la maximumul din acest șir se obține un șir :

$$\Psi_1 = \frac{\delta f_1}{\max(\delta f_i)}, \Psi_2 = \frac{\delta f_2}{\max(\delta f_i)}, \dots, \Psi_n = \frac{\delta f_n}{\max(\delta f_i)}, \quad i = 1..n \quad (11)$$

de numere pozitive subunitare, numai un singur element având valoarea 1:

$$\Psi : \{ \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n \} \quad (12)$$

Din (9) și (10) obținem:

$$\delta f_i(x, a) = \frac{f_{i-U} - f_{i-D}(x, a)}{f_{i-U}} = \gamma(a) \cdot (\bar{\phi}_i''(x))^2 \quad (13)$$

Normalizând aceste valori vom obține un șir care este independent de severitate:

$$\Phi_1 = \frac{\delta f_1}{\max(\delta f_i)} = \frac{\gamma(a)(\bar{\phi}_1''(x))^2}{\max\{\gamma(a)(\bar{\phi}_i''(x))^2\}} = \frac{(\bar{\phi}_1''(x))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x))^2\}} \quad (14)$$

.....

$$\Phi_n = \frac{\delta f_n}{\max(\delta f_i)} = \frac{\gamma(a)(\bar{\phi}_n''(x))^2}{\max\{\gamma(a)(\bar{\phi}_i''(x))^2\}} = \frac{(\bar{\phi}_n''(x))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x))^2\}}$$

Dacă considerăm k poziții ale defectului pe grindă, pentru fiecare locație x_1, x_2, \dots, x_k vom determina pătratul curburii modului de vibrație în acest punct $(\bar{\phi}_i''(x_j))^2$. Normalizând aceste valori, pentru fiecare poziție considerată pe grindă x_1, x_2, \dots, x_k prin împărțirea la maximumul valorilor de pe o linie vom obține coeficienții de influență a defectului:

$$\Phi_1(x_1) = \frac{(\bar{\phi}_1''(x_1))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_1))^2\}}, \Phi_2(x_1) = \frac{(\bar{\phi}_2''(x_1))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_1))^2\}}, \dots, \Phi_n(x_1) = \frac{(\bar{\phi}_n''(x_1))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_1))^2\}}$$

$$\Phi_1(x_2) = \frac{(\bar{\phi}_1''(x_2))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_2))^2\}}, \Phi_2(x_2) = \frac{(\bar{\phi}_2''(x_2))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_2))^2\}}, \dots, \Phi_n(x_2) = \frac{(\bar{\phi}_n''(x_2))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_2))^2\}}$$

.....

$$\Phi_1(x_k) = \frac{(\bar{\phi}_1''(x_k))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_k))^2\}}, \Phi_2(x_k) = \frac{(\bar{\phi}_2''(x_k))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_k))^2\}}, \dots, \Phi_n(x_k) = \frac{(\bar{\phi}_n''(x_k))^2}{\max\{(\bar{\phi}_i''(x_k))^2\}}$$

Astfel, pentru o poziție a defectului pe grindă x_j obținem un indicator al poziției defectului (DLI):

$$\Phi_j : \{ \Phi_1(x_j), \Phi_2(x_j), \dots, \Phi_n(x_j) \} \quad (15)$$

Considerând k astfel de poziții echidistante distribuite pe grindă i.e. $j = 1 \dots k$ se obține o matrice cu k linii și n coloane. Fiecare linie din matrice, adică fiecare șir Φ_j , caracterizează în mod unic o anumită poziție de pe grindă [12]. Șirul Ψ , care este o matrice linie este comparat succesiv cu fiecare linie a matricii obținute din (15). Poziția x_j , pentru care valorile din linia j a matricii Φ sunt cele mai apropiate de valorile matricii linie Ψ , ne va da poziția defectului pe grindă.

În lucrare ne propunem să studiem dacă acești indicatori ai poziției defectului se pot utiliza atunci când ținem cont și de influența temperaturii. În acest scop se consideră grinda dublu încastrată prezentată în paragraful 2, care prezintă un defect transversal cu lățimea de 0,1 mm, aflat la distanța de 400 mm față de unul din capete și având adâncimea jumătate din înălțimea grinzii. Cercetarea s-a realizat la diferite temperaturi de 0 °C, 10 °C, 15 °C, 20 °C, 26 °C, considerând ca temperatură de referință 24,85 °C. Valorile frecvențelor obținute sunt reprezentate grafic în figura 7.

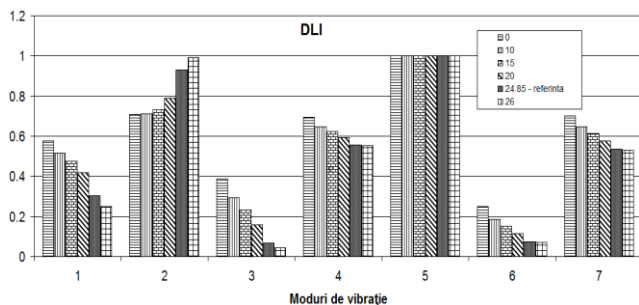


Fig. 7

Indicatorul poziției defectului pentru defectul situat la 400 mm

Analizând rezultatele obținute se observă că valorile frecvențelor diferă mult de la o temperatură la alta. Deci, putem concluziona că trebuie să analizăm frecvențele la aceeași temperatură sau să găsim o relație matematică care să compenseze modificările de temperatură. Acest lucru se poate face prin înlocuirea relației (1) în formula (8) care ne dă frecvența. Astfel:

$$(16)$$

În aplicațiile practice este suficient să facem studiul frecvențelor până apare primul mod de flambaj.

5. Concluzii

■ În lucrare se prezintă influența forțelor axiale care apar într-o grindă din cauza modificărilor de temperatură asupra procesului de detectare de defecte.

■ Frecvențele pentru diferite moduri de vibrație sunt influențate în mod diferit de modificările de temperatură. În lucrare se prezintă necesitatea considerării în formula frecvenței și a forțelor induse de modificarea temperaturii, putându-se astfel utiliza indicatorii poziției defectului (DLI) pentru a determina poziția defectului pe grindă.

Mulțumiri: Rezultatele prezentate în acest articol au fost obținute cu sprijinul Ministerului Fondurilor Europene prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, Contract nr. POSDRU/159/1.5/S/132395.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Han, S.M., Benaroya, H., Wei, T., *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories* J. Sound Vib. 225(5), 1999, 935-988.
- [2] Timoshenko, S.P., *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section* Philos. Mag. A 41, 1921, 744-6
- [3] Cowper, G.R., *The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory* J. Appl. Mech.-T, ASME 33(2), 1966, 335-40.
- [4] Ece, M.C., Aydogdu, M., Taskin, V., *Vibration of a variable cross-section beam* Mech. Res. Commun. 34(1), 2007, 78-84.
- [5] Salawu, O.S., *Detection of structural damage through changes in frequency: a review* Eng. Struct. 19(9), 1997, 718-723.
- [6] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Iavornic, C.M., *Reliable method to detect and assess damages in beams based on frequency changes*, Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences (Chicago) paper DETC, 2012-70094.
- [7] Al-Ansari, L., Al-Waily, M., Al-Hajjar, Y., *Experimental and Numerical Study of Crack Effect on Frequency of Simple Supported Beam* Al-Khwarizmi Eng. J. 8(2), 2012, 30-41.
- [8] Chondros, T. G., Dimarogonas, A.D., Yao, J., *Vibration of a beam with a breathing crack*, J. Sound Vib. 239(1), 2001, 57-67.

- [9] Azadi, M., *Free and forced vibration analysis of FG beam considering temperature dependency of material properties* J. Mech. Science Tech. 25(1), 2011, 69-80.
- [10] Zapico, J.L., Worden, K., Molina, F.J., *Vibration-based damage assessment in steel frames using neural networks* Smart Mater. Struct. 10(3), 2001, 553–9.
- [11] Hios, J.D., Fassois, S.D., *A global statistical model based approach for vibration response-only damage detection under various temperatures: A proof-of-concept study* Mech. Syst. Signal Process. 49(1-2), 2014, 77-94.
- [12] Gillich, G.R., Praisach, Z. I., *Detection and Quantitative Assessment of Damages in Beam Structures Using Frequency and Stiffness Changes* Key Eng. Mat. 569 1013-20, 2013.
- [13] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., *Modal identification and damage detection in beam-like structures using the power spectrum and time–frequency analysis* Signal Process. 96(Part A), 2014, 29–44.
- [14] Praisach, Z.I., Gillich, G.R., Birdeanu, D.E., *Considerations on natural frequency changes in damaged cantilever beams using FEM* Latest trends on engineering mechanics, structures, engineering geology 214-9, 2010.
- [15] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Negru, I., *Damages influence on dynamic behaviour of composite structures reinforced with continuous fibers* Mater. Plast. 49(3), 2012, 186-191.
- [16] Gillich, G.R., Birdeanu, E.D., Gillich, N., Amarie, i D., Iancu, V., Jurcau, C.S., *Detection of damages in simple elements* Annals of DAAAM and Proceedings of the International DAAAM Symposium, 2009, 623-624.
- [17] Reddy, J.N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells* Second edition (Boca Raton: CRC Press), 2006.
- [18] Tufoi, M., Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Iancu, V., Furdui, H., *About the Influence of Temperature, Changes on the Natural Frequencies of Clamped-Clamped Euler-Bernoulli Beams* Rom. J. Accoust. Vib. 11(2) 84-7.

Drd.Ing. Horea Furdui,
e-mail: h.furdui@uem.ro

Prof.univ.Dr.Ing.ec. Gilbert-Rainer Gillich,
membru AGIR, e-mail: gr.gillich@uem.ro

Dr. mat. Andrea Amalia Minda,
e-mail: a.minda@uem.ro

Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița