A XVI-a Conferinţă internaţională – multidisciplinară
„Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii româneşti"
SEBEŞ, 2016

METODA SPH ÎN PROBLEME HIDROTEHNICE

Vasile NĂSTĂSESCU, Ghiţă BÂRSAN

SPH METHOD IN HYDRAULIC PROBLEMS

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method is a meshless numerical method, which has many advantages comparatively with Finite Element Method (FEM), regarding those problems where large displacement, strong nonlinearities or deformations with high strain rates occur (high velocity impact problems, air or underwater explosion calculus etc.). As fluid mechanics is concerned, this method is practically completely validated. Some very difficult problems, like fluid-structure interaction (FSI), free surface evolution of a fluid and others, can be easier solved by SPH method. In our country this numerical method is practically unused and even unknown. This paper comes firstly with theoretical fundamentals of the SPH method, after that an hypothetical hydraulic problem is solved. It is about the numerical modeling of a gate which controls the fluid level between two enclosed spaces. In addition to urging the use of SPH method, this paper presents an available numerical model, based on this method, for many others similar problems and useful conclusions.

Keywords: free particles, SPH, Navier -Stokes, flowing, fluid
Cuvinte cheie: particule libere, SPH, ecuaţiile Navier-Stokes, curgere, fluid

1. Introducere

Metoda SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) este o metodă de analiză numerică a mediilor continue, care aparţine unei clase mai largi de metode numerice cunoscută sub numele de metoda particulelor libere (free particles method), sau metoda fără reţea (meshless method), sau metoda bazată pe particule (particle-based method), sau metoda cu reţea liberă (meshfree method) etc. Aşadar, metoda SPH este o versiune, cea mai folosită şi cea mai cunoscută a unei metode generale având unul din numele prezentate mai sus.

Din punct de vedere istoric, metoda SPH este şi cea mai veche, fiind legată de primele formulări ale metodei particulelor libere, apărute în anul 1977 în legătură cu rezolvarea unor probleme de astrofizică, în spaţiul 3D deschis şi politrop, având ca autori pe Lucy, Gingold şi Monaghan.

Formularea matematică este de tip Lagrange, tipul funcţiilor de aproximare este integrală, cu aproximare la nivelul particulei. În utilizarea metodei SPH, starea iniţială a sistemului este reprezentată fizic de un set de particule (plasate din punct de vedere geometric, în noduri), cu proprietăţi materiale individuale şi care se mişcă potrivit ecuaţiilor de conservare cărora se supun. Distribuţia particulelor pe domeniul analizat este una uniformă (distanţă internodală şi dispunere spaţială uniformă). Fiecare particulă se caracterizează prin variabile de câmp, care pot fi masa (m), densitatea (ρ), presiunea (p), poziţia (r), viteza (v), acceleraţia (a), temperatura (T) ş.a. Pentru evaluarea funcţiilor de câmp, referitoare la oricare din variabilele sale, se foloseşte metoda reprezentării integrale a funcţiilor respective.

Metoda reprezentării integrale – fundament conceptual şi matematic al metodei SPH – se face în condiţiile utilizării unei funcţii de pondere, care realizează de fapt o aproximare ponderată a variabilei sau funcţiei de câmp. Aproximarea ponderată se realizează pe baza particulelor, aflate pe un domeniu local (în jurul unei particule), numit domeniu suport sau suport compact, prin însumarea valorilor de câmp respective (reprezentând funcţiile şi derivatele acestora, până la ordinul doi) corespunzătoare particulelor învecinate.

Această aproximare se realizează pentru fiecare pas de timp, la care distribuţia particulelor, de regulă, este alta.

2. Fundamente teoretice ale metodei SPH

Conceptul de reprezentare integrală a unei funcţii *F(x)* se bazează pe următoarea identitate matematică:

$$F(x) = \int_{\Omega} F(x')\delta(x - x')dx' \tag{1}$$

în care *F(x)* este o funcţie a unei variabile de câmp, într-un nod (într-o particulă) definit(ă) de variabila *x,* care este vectorul de poziţie al nodului (particulei) respectiv(ă), într-un spaţiu 1D, 2D sau 3D; $\delta(x-x')$ este funcţia delta Dirac, care are valorile:

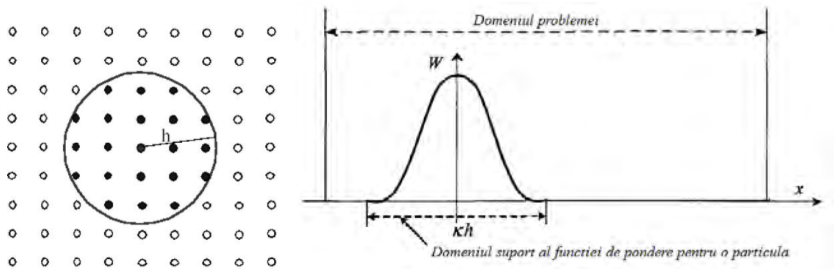
$$\delta(x-x')=\begin{cases}1 & \text{pentru} \quad x=x' \\ 0 & \quad\quad\quad\quad x\neq x'\end{cases} \tag{2}$$

Domeniul Ω este acel domeniu local care conţine variabila x. Ecuaţia (2) defineşte o valoare exactă a funcţiei $F(x)$ atâta timp cât se foloseşte funcţia Dirac, cu proprietăţile de mai sus.

În metoda SPH, funcţia Dirac este înlocuită de ***funcţia de pondere*** $W(x-x',h)$, astfel că relaţia (1) devine:

$$\langle F(x)\rangle=\int_{\Omega}F(x')W(x-x',h)dx' \tag{3}$$

Funcţia de pondere $W(x-x',h)$ este cunoscută în literatură [1], [2], [3], [5] şi ca funcţie kernel sau funcţie de netezire. Parametrul h, din funcţia de pondere, se numeşte *lungime de netezire* şi el defineşte domeniul de acţiune al funcţiei de pondere, ca în figura 1, a.



a) b)

Fig. 1 Lungimea de netezire şi a domeniului suport

Evident că, atâta timp cât funcţia de pondere (netezire) este alta decât funcţia Dirac, valoarea funcţiei $F(x)$ din relaţia (3) este una aproximativă, motiv pentru care s-au folosit parantezele unghiulare.

În spaţiul 3D, domeniul de aplicare al funcţiei de pondere este o sferă, în spaţiul 1D, reprezentarea grafică a funcţiei de pondere este o curbă (figura 1, b), iar în spaţiul 2D o suprafaţă ca în figura 2.

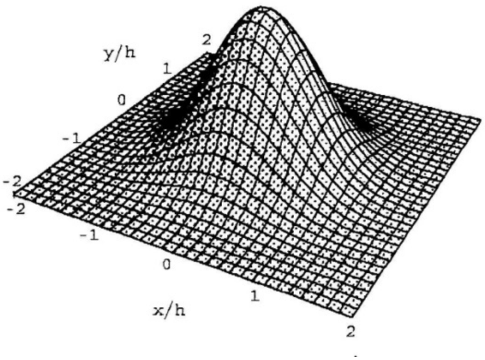


Fig. 2 Reprezentarea grafică a funcţiei de pondere în spaţiul 2D

Funcţia de pondere (de netezire sau funcţia kernel) este aleasă astfel încât să fie una pară, care să îndeplinească o serie de condiţii, prezentate mai jos. O primă condiţie, este de normalizare:

$$\int_{\Omega} W(x-x',h)dr' = 1 \tag{4}$$

O altă condiţie este aceea de a avea proprietăţile funcţiei Delta, când lungimea de netezire h tinde spre zero; matematic, se scrie:

$$\lim_{h->0} W(x-x',h) = \delta(x-x') \tag{5}$$

De asemenea, funcţiei de pondere i se mai cere îndeplinirea condiţiei de compactitate, reprezentate prin relaţia

$$W(x-x',h) = 0 \quad \text{când} \quad |x-x'| > kh, \tag{6}$$

în care k este o constantă, referitoare la funcţia de pondere pentru particula definită de x, prin care se defineşte aria efectivă pe care funcţia de pondere nu este zero.

Această arie (în spaţiul 3D, devine volum) poartă numele de domeniu suport al funcţiei de netezire, pentru particula definită de X.

Funcţiei de pondere i se mai impune ca pe domeniul suport al său, să aibă numai valori pozitive (cerinţa de pozitivitate); matematic, cerinţa este exprimată de relaţia (7), pentru orice particulă plasată pe domeniul suport al funcţiei:

$$W(x-x') \geq 0 \tag{7}$$

Valorile funcţiei de pondere pentru o variabilă de câmp a unei particule trebuie să fie monoton descrescătoare odată cu creşterea distanţei, pe orice direcţie, faţă de particula respectivă.

Se mai cere funcţiei de pondere să fie una pară, care îi asigură proprietatea de simetrie. În sfârşit, funcţiei de pondere i se mai cere să asigure o pondere sau netezire suficientă. De toate aceste proprietăţi trebuie să se ţină seama la construirea funcţiilor de pondere, dar mai trebuie să fie cunoscute şi în practica utilizării metodei, în scopul adoptării unor opţiuni corecte şi a înţelegerii şi interpretării rezultatelor.

În calculele dezvoltate cu metoda SPH apare necesitatea exprimării derivatelor funcţiei de pondere; acestea, ca şi funcţia de pondere, trebuie exprimate sub formă integrală. Una din cele mai folosite funcţii de pondere este cea propusă de Monaghan şi Lattanzio, în 1985, numită funcţia spline cubică, sau funcţia B-spline [2], [3]:

$$W(s) = \frac{\alpha}{h^n}\begin{cases} \frac{2}{3} - s^2 + \frac{1}{2}s^3 & 0 \le s \le 1 \\ \frac{1}{6}(2-s)^3 & 1 \le s < 2 \\ 0 & \end{cases} \tag{8}$$

Constanta α poate lua valorile 1, $\frac{15}{7\pi}$ sau $\frac{3}{2\pi}$, în funcţie de dimensiunile spaţiului (1D, 2D, respectiv 3D), n, al domeniului suport.

În Figura 3 este prezentat graficul funcţiei de pondere şi al primelor două derivate ale sale.

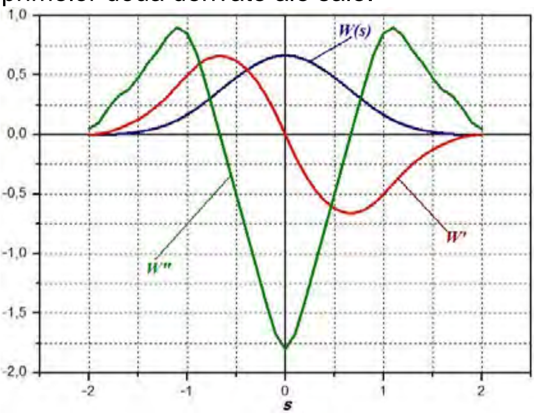


Fig. 3 Funcţia de pondere B-spline cubică şi primele două derivate ale sale

4. Exemplu ilustrativ

Acest exemplu ilustrativ, privind aplicarea metodei SPH în probleme de hidrotehnică, se referă la simularea curgerii printr-un stăvilar controlat (se deschide după o lege dată), pentru controlul nivelului apei între două incinte închise (figura 4).

În figura de mai jos au fost marcate trei particule, reprezentând poziţionări particulare diferite, a căror evoluţie va fi urmărită.

Volumul de lichid care va trebui distribuit între cele două incinte este de 1 m^3, acesta fiind modelat cu 2601 particule, uniform distribuite, cu distanţa internodală de 2 cm.

Fig. 4 Modelul SPH al problemei la momentul $t = 0$

Cele două incinte (una goală, de 3 m şi una cu conţinutul iniţial de fluid) sunt delimitate de pereţi rigizi, iar stăvilarul, de 1,5 m înălţime, confecţionat din oţel, este modelat cu 201 particule cu distanţa internodală de 0,75 cm.

Legea de mişcare a stăvilarului pe verticală este prezentată în figura 5. Pentru apă, s-a folosit modelul de material elasto-plastic-hydro şi ecuaţia de stare Gruneisen. Modelul adoptat are avantajul că nu se impune modelarea contactului.

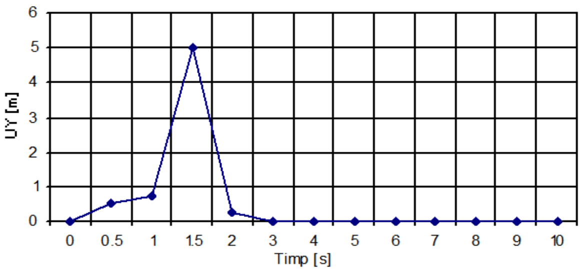
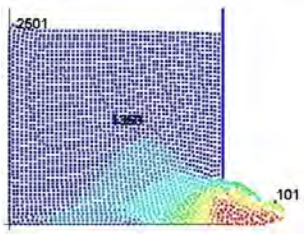
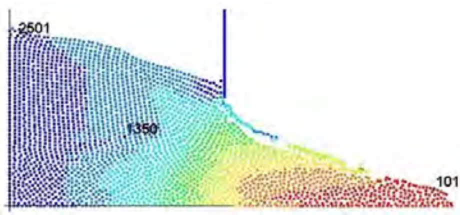


Fig. 5 Legea de mişcare a stăvilarului pe verticală

În figurile 6 şi 7, este reprezentată evoluţia curgerii la diferite momente de timp, împreună cu evidenţierea câmpului vitezelor V_x.



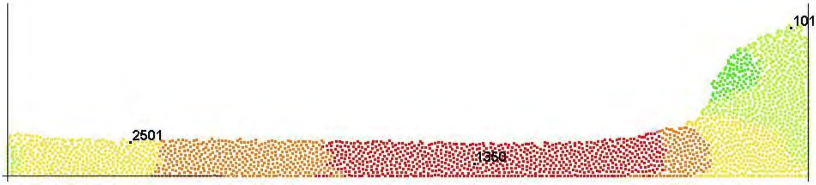
t = 0,20 s



t = 0,50 s

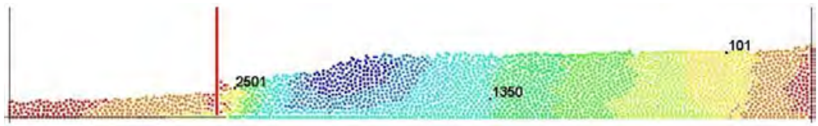
t = 1,00 s

t = 1,50 s

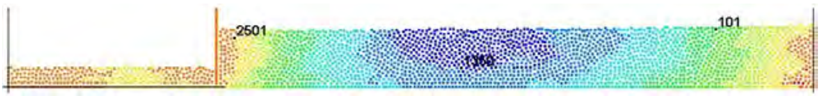


t = 1,75 s

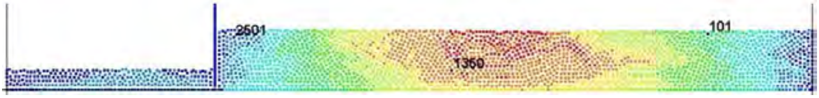
t = 2,00 s



t = 3,00 s

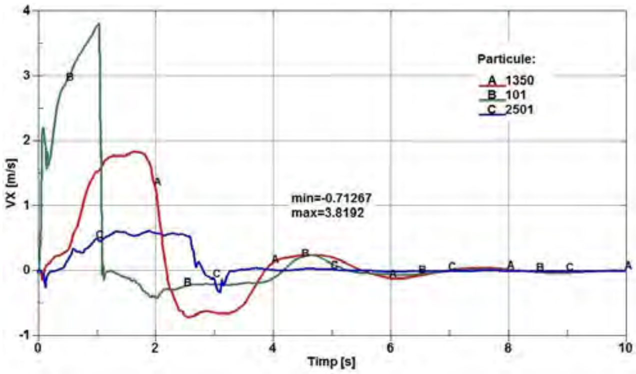


t = 6,00 s

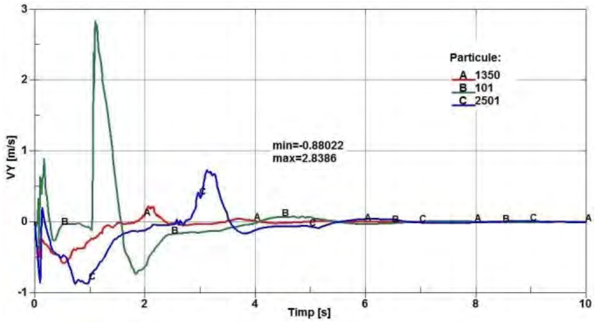


t = 10,00 s

Fig. 6 Evoluţia a timp a curgerii prin stăvilar



a)



b)

Fig. 7 Evoluţia în timp a vitezelor V_x şi V_y a particulelor marcate

În figura 8 este prezentată variaţia în timp a energiei cinetice a apei, unde se constată existenţa unui maxim, dar şi revenirea la starea de echilibru (valoarea zero).

Se mai observă că durata de analiză aleasă este una excesivă, deoarece între 6…10 secunde energia cinetică este stabilizată la valoarea de echilibru.

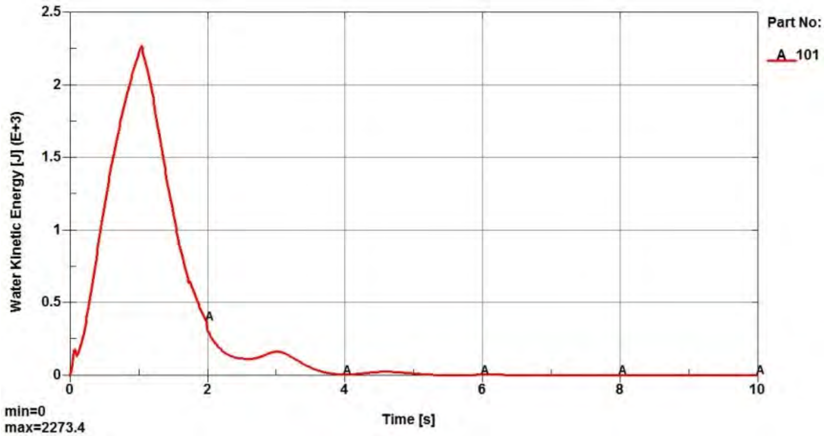


Fig. 8 Evoluţia energiei cinetice a fluidului

5. Concluzii

Metoda SPH este o metodă relativ nouă, puţin cunoscută în ţara noastră, dar şi mai puţin utilizată. Metoda SPH, la fel ca alte metode numerice este o metodă aproximativă, dar foarte utilă în rezolvarea multor probleme din domenii foarte diferite.

Se pare că în domeniul astrofizicii - din care provine - este de neînlocuit, dar în domeniul mecanicii aplicate şi al mecanicii fluidelor se dovedeşte a fi potrivită sau o alternativă, în multe cazuri.

Dacă utilizarea sa în mecanica aplicată încă cunoaşte cercetări şi validări, în domeniul mecanicii fluidelor este o metodă validată, prezentând comparativ cu metoda elementelor finite unele avantaje esenţiale, cum ar fi modelarea şi simularea stării suprafeţei libere a fluidului, rezolvarea automată (intrinsecă) a problemelor de interacţiune fluid-structură, formularea automată a contactului între corpurile modelate cu particule libere ş.a.

Metoda SPH este deja implementată în multe programe profesionale performante de analiză numerică a mediilor continue, precum ABAQUS, ANSYS, LS-DYNA, AUTODYN şi altele.

Modelul SPH poate fi unul 1D, 2D sau 3D, în funcţie de problema cercetată şi scopurile urmărite. Cerinţele generale de modelare, inclusiv restricţiile şi condiţiile la limită, sunt cele care apropie cel mai mult modelul numeric de modelul fizic, real.

Modelul SPH poate fi parte a unui model numeric, care conţine simultan elemente finite şi particule libere.

Exemplul ilustrativ prezentat pune în evidenţă o serie de concluzii şi observaţii, din care o parte sunt evidenţiate aici, sau rezultă din imaginile obţinute prin post-procesare grafică. Semnificative sunt imaginile reprezentând suprafaţa liberă a fluidului, mişcările particulelor şi evoluţia energiei cinetice a fluidului. Întreaga evoluţie a fluidului are loc exclusiv sub acţiunea acceleraţiei gravitaţionale.

BIBLIOGRAFIE

[1] Liu, G.R., *Meshfree Methods, Mooving Beyond the Finite Element Method,* Second Edition, CRC Press Taylor & Francis Group, 2010, LLC, ISBN 978-1-4200-8209-8.
[2] Liu, G.R., Liu, M.B., *Smoothed Particle Hydrodynamics – a meshfree particle method,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., ISBN 981-238-456-1.
[3] Năstăsescu, V., Bârsan, Gh., *Metoda particulelor libere în analiza numerică a mediilor continue,* Editura AGIR, Bucureşti, 2015, ISBN 978-973-720-617-6.
[4] Năstăsescu, V., Iliescu, N., *Numerical Simulation of the Impact Problems by SPH Method,* Proceedings of IV-th National Conference THE ACADEMIC DAYS of Academy of Technical Science in Romania, Iaşi, 19-20 November 2009, vol. 1, pag. 193-198, AGIR Publishing House, ISSN: 2066-6586.
[5] Oñate, E., Owen, R., *Particle-Based Methods - Fundamentals and Applications,* Springer Science+Business Media B.V., 2011, ISBN 978-94-007-0734-4, e-ISBN 978-94-007-0735-1.

Prof. univ. emerit Dr. Ing. Vasile NĂSTĂSESCU
membru titular al Academiei de Ştiinţe Tehnice din România,
profesor asociat în Academia Tehnică Militară, Bucureşti
e-mail: nastasescuv@gmail.com

General de brigadă Prof. univ. Dr. Ing. Ghiţă BÂRSAN
Rectorul Academiei Forţelor Terestre, Sibiu
e-mail: ghbarsan@gmail.com