



## **INFLUENȚA DEFECTULUI ASUPRA MODIFICĂRII TEMPERATURII CRITICE LA FLAMBAJ**

Horea FURDUI, Gilbert-Rainer GILLICH, Andrea Amalia MINDA

### **DAMAGE INFLUENCE ON THE CRITICAL BUCKLING TEMPERATURE**

This paper presents the influence of a transverse damage in a double-clamped beam upon the critical buckling temperature. First, the buckling temperatures and subsequent loads are analytically investigated on an intact prismatic beam, together with the dynamic behavior in terms of the natural frequencies. Afterwards, the effect of a transverse damage is considered, and a relation expressing the frequency alteration due to the crack is provided. To prove the relation's validity a finite element analysis was performed for some particular cases, and the results compared with those obtained analytically. The investigation did show a good concordance between the results obtained in the two ways, proving the correctness of the analytical approach.

Keywords: double-clamped beam, damage, thermal buckling

Cuvinte cheie: grindă dublu încastrată, defect, flambaj, temperatură critică

### **1. Introducere**

În scopul monitorizării diferitelor structuri este nevoie să ținem cont de efectele mediului exterior asupra acestora, ca de exemplu de creșterea de temperatură, apariția sarcinilor operaționale etc. În cazul structurilor din lemn trebuie să ținem cont în mod suplimentar și de umiditate, deoarece aceasta produce o creștere a masei structurii datorită apei acumulate în componentele acesteia.

Efectul temperaturii este considerat de majoritatea cercetătorilor ca fiind cel mai semnificativ în modificarea comportamentului dinamic al structurii fixate rigid la capete. Efectul acesteia asupra frecvențelor proprii ale structurilor metalice este prezentat în [1, 2]. În lucrarea [3] s-a realizat un studiu în care s-a evidențiat modul în care frecvențele proprii ale grinzilor dublu încastrate sunt influențate de modificările de temperatură. În această lucrare se prezintă modul în care defectul apărut într-o asemenea structură influențează modificările temperaturii critice.

## 2. Frecvențele proprii ale grinzilor supuse la încărcări axiale, determinate analitic

În această lucrare se prezintă comportamentul unei grinzi dublu încastrate atunci când are loc o modificare a temperaturii. Atunci când temperatura crește sau scade de la o temperatură de referință  $T_{ref}$  la temperatura  $T$  (adică cu  $\Delta T$ ), într-o grindă dublu încastrată de lungime  $L$ , lățime  $b$  și înălțime  $h$ , densitate  $\rho$ , apare o încărcare internă  $P$ :

$$P(T) = \alpha \times E \times b \times h \times \Delta T = \alpha \times E \times b \times h \times (T - T_{ref}) \quad (1)$$

În relația (1)  $E$  este modulul de elasticitate longitudinală și  $\alpha$  coeficientul de dilatare termică.

Deformarea grinzii, datorită flambajului, are loc după ecuația:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} + \zeta^2 v = 0 \quad (2)$$

În relația (2) s-a notat  $\zeta^2 = \frac{P}{EI}$ , unde  $I$  este momentul de inerție. Soluția acestei ecuații este [3]:

$$v(x) = c_1 \sin(\zeta x) + c_2 \cos(\zeta x) + c_3 x + c_4 \quad (3)$$

iar ecuația caracteristică care permite determinarea valorilor proprii de flambaj este:

$$\zeta \sin \zeta + 2 \cos \zeta - 2 = 0 \quad (4)$$

Ecuația de mișcare a unei grinzi Euler-Bernoulli care vibrează uniform este dată de:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

unde  $\lambda^2 = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$  este numărul de undă și  $\omega$  este frecvența unghiulară. Ecuația caracteristică (6) permite determinarea valorilor proprii  $\lambda_i$  pentru fiecare mod de vibrație  $i$  în parte:

$$\cosh \lambda \cdot \cos \lambda = 1 \quad (6)$$

În tabelul 1 avem cuprinse, pe lângă primele șase numere de undă  $\lambda_i$  și primele șase valori proprii de flambaj  $\zeta_j$ .

Tabelul 1

Moduri de flambaj	Valori proprii de flambaj $\zeta_j$	Moduri de vibrație	Numere de undă $\lambda_i$
1	6,283185307	1	4,73004074
2	8,986818915	2	7,85320462
3	12,56637061	3	10,99560783
4	15,45050367	4	14,13716549
5	18,84955592	5	17,27875965
6	21,80824331	6	20,42035224

Atunci când forțele axiale nu sunt prezente, frecvența proprie este dată de [4]

$$f_{i\_ref} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (7)$$

La apariția unei sarcini axiale  $P$ , frecvența proprie scade odată cu creșterea încărcării, iar atunci când apare fenomenul de flambaj, adică se atinge valoarea critică  $P_{cr-1} = \zeta_1^2 EI$ , frecvența devine nulă. Până în acest moment frecvența proprie poate fi determinată din relația:

$$f_i(P) = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A} - \frac{P}{\rho A} \left( \frac{L^2}{\zeta_i^2} \right)} = f_{i\_ref} \sqrt{1 - \frac{P}{EI} \left( \frac{L^2}{\zeta_i^2} \right)} \quad (8)$$

În relația (8) termenul de sub radical este un termen de corecție. Este important de precizat că este suficient să analizăm modificările frecvențelor doar până în momentul în care a apărut primul mod de flambaj.

### 3. Analiza cu elemente finite

Analiza cu elemente finite s-a realizat utilizând softul SolidWorks. S-a analizat, utilizând modulul *Thermal analysis*, comportamentul unei grinzi prismatice de oțel având caracteristicile geometrice și mecanice cuprinse în tabelul 2.

Considerând temperatura de referință  $T_{ref} = 24,85 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , s-a realizat o analiză termică pentru diferite temperaturi cuprinse între  $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$  și  $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$  (chiar dacă unele temperaturi depășesc temperaturile probabile ale mediului înconjurător).

Tabelul 2

$L$ [mm]	$b$ [mm]	$h$ [mm]	$I$ [mm <sup>4</sup> ]
1000	50	10	4166,66
$E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$M$ [-]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]
$2 \cdot 10^5$	0,3	$7850 \cdot 10^{-9}$	$1,25 \cdot 10^5$

În tabelul 3 avem cuprinse valorile forțelor critice de flambaj și a temperaturilor critice obținute din analiză modală și cele obținute analitic, pentru primele două moduri de flambaj.

Tabelul 3

Modul de flambaj	Forța critică [N]		Temperatura critică [°C]	
	Analitic	FEM	Analitic	FEM
1	32898,6287	32716,7	52,26556778	53,5
2	67302,32084	66860,7	80,9353571	83,3

În figura 2 se prezintă frecvențele proprii pentru primele 6 moduri de vibrație obținute din analiza cu element finit, pentru intervalul

de temperatură 0...100 °C. Se observă că frecvența devine nulă la atingerea temperaturii critice.

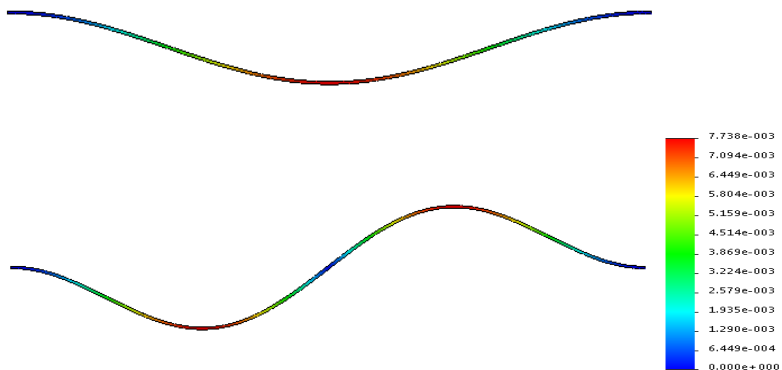


Fig. 1 Formele primelor două moduri de flambaj

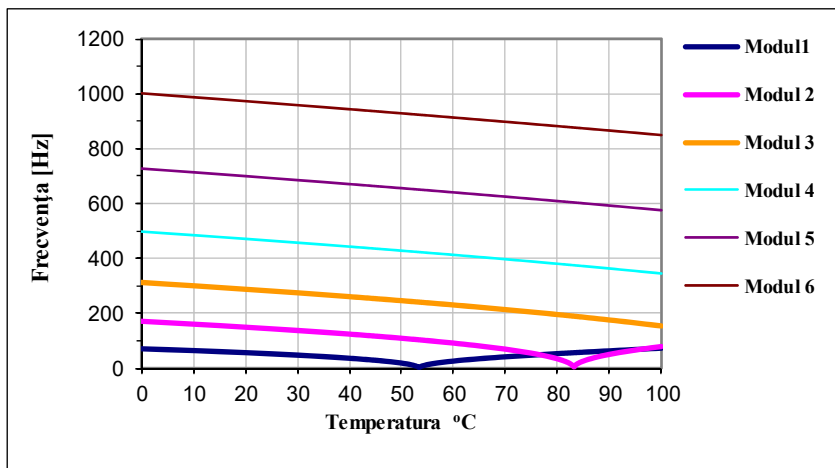


Fig. 2 Frecvențele proprii pentru primele șase moduri de vibrație

În figura 3 s-a reprezentat grafic cu linie continuă frecvența proprie obținută prin analiză modală și valorile frecvențelor determinate analitic, pentru intervalul de temperatură cuprins între 0 °C și 60 °C. Se

observă că valorile frecvențelor determinate analitic sunt foarte apropiate de cele determinate prin analiză cu elemente finite.

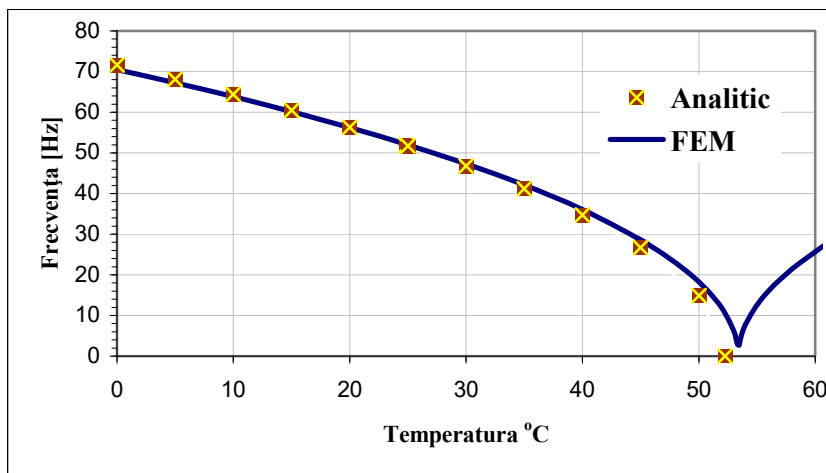


Fig. 3 Frecvența pentru primul mod de vibrație determinată analitic și din analiză modală

În cele ce urmează, se consideră o grindă dublu încastrată având caracteristicile din tabelul 2. Această grindă prezintă o discontinuitate transversală cu lățimea de 0,1 mm, situată mai întâi la distanța de 235 mm, apoi la distanța de 500 mm față de unul din capete, cu proprietatea că această discontinuitate are adâncimea de 5 mm.

Pentru temperaturi mai mici decât temperatura critică, frecvențele proprii ale grinzii cu discontinuitate se modifică după aceeași regulă ca și când nu ar exista modificări ale temperaturii. Așa cum se poate vedea în figura 4, în intervalul de temperatură, aflat înaintea zonei de flambaj, frecvența grinzii este mai mică cu cât discontinuitatea este mai îndepărtată de capătul considerat al grinzii. Dacă în intervalul 0...5 °C raportul dintre frecvențe se păstrează, cu cât ne apropiem de temperatura critică, se constată că frecvența proprie a grinzii cu defectul situat la distanța de 235 mm se apropie de valorile frecvențelor proprii ale grinzii intacte, ajungând ca în intervalul 25...40 °C aceste valori să fie aproximativ egale. În zona de flambaj, pentru temperaturile mai mici decât temperatura critică frecvența grinzii cu defectul situat la 235 mm devine mai mare decât frecvența grinzii intacte, iar apoi, după atingerea temperaturii critice, frecvența grinzii cu

defectul situat la distanța de 500 mm față de capătul considerat, devine mai mare decât frecvența grinzii intacte (figura 5).

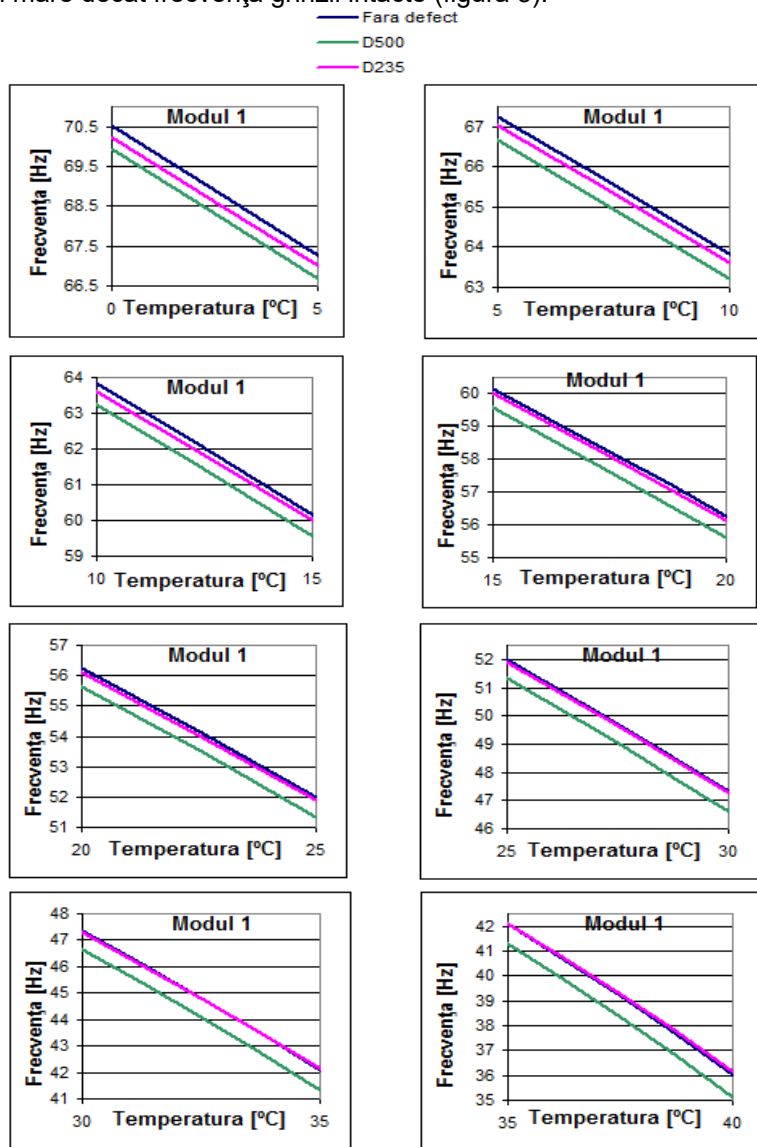


Fig. 4 Frecvențele proprii pentru grinda cu și fără defect

În zona de flambaj, atunci când forțele axiale se apropie de forța critică, frecvența tinde la zero.

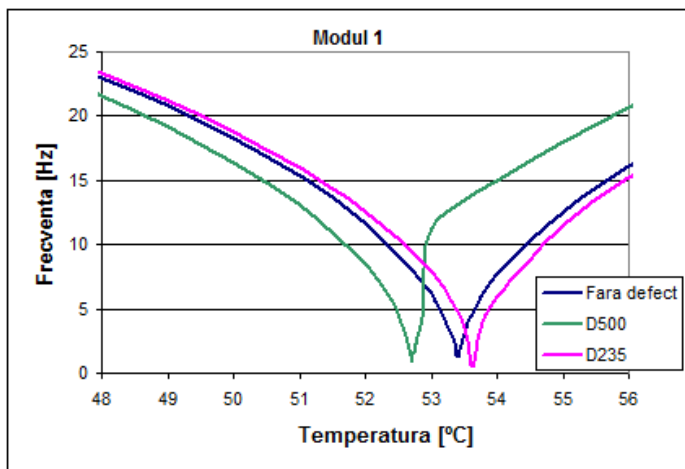


Fig. 5 Modificările frecvențelor proprii pentru primul mod de vibrație, în zona de flambaj

#### 4. Concluzii

■ Studiul prezentat în această lucrare reflectă modul în care discontinuitățile geometrice într-o grindă încastrată la ambele capete influențează frecvențele proprii. S-a pus în evidență faptul că, în modul unu de vibrație, pentru defectul situat la mijlocul grinzii ( $x_1 = 500$  mm) frecvența proprie ia valoarea zero la o temperatură mai mică decât în cazul grinzii intacte. De altfel, pentru orice temperatură mai mică decât temperatura critică de flambaj, frecvența barei cu defect este inferioară frecvenței barei fără defect la aceeași valoare a temperaturii.

■ Pentru defectul situat la  $x_2 = 235$  mm de un capăt al grinzii frecvența proprie a grinzii este asemănătoare cu cea a grinzii intacte până când temperatura se apropie de temperatura critică. În jurul acestei valori frecvența barei defecte depășește frecvența barei fără defect și atinge valoarea zero la o temperatură mai mare decât bara intactă. Cunoașterea modului în care frecvențele proprii iau valori la schimbarea a doi parametri (geometric - datorită defectului, respectiv fizic - datorită temperaturii) permite aplicarea procedurilor de detectare



vibro-acustică a defectelor dezvoltat de autori și în cazul variațiilor de temperatură.

*Mulțumiri:* Rezultatele prezentate în acest articol au fost obținute cu sprijinul Ministerului Fondurilor Europene prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013 POSDRU/159/1.5/S/132395.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Azadi, M., *Free and forced vibration analysis of FG beam considering temperature dependency of material properties*, Journal of Mechanical Science and Technology, 25(1), pp. 69-80, 2011.
- [2] Hios, J.D., Fassois, S.D., *A global statistical model based approach for vibration response-only damage detection under various temperatures: A proof-of-concept study*, Mechanical Systems and Signal Processing, 49(1-2), pp. 77-94, 2014.
- [3] Tufoi, M., Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Iancu, V., Furdui, H., *About the Influence of Temperature Changes on the Natural Frequencies of Clamped-Clamped Euler-Bernoulli Beams*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration, 11(2), pp. 84-7, 2014.
- [4] Gillich, G.R., Minda, P.F., Praisach, Z.I., Minda, A.A., *Natural Frequencies of Damaged Beams - A New Approach*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration, 9(2), pp. 101-108, 2012.
- [5] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., *Modal identification and damage detection in beam-like structures using the power spectrum and time-frequency analysis*, Signal Processing, 96(Part A), pp. 29-44, 2014.
- [6] Burada, C.O., Miritoiu, C.M., Stanescu, M.M., Bolcu, D., *Experimental determinations of some mechanical properties for new types of composite bars with polypropylene honeycomb core*, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, 16(1), pp. 70-79, 2015.
- [7] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Iavornic, C.M., *Reliable method to detect and assess damages in beams based on frequency changes*, Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences (Chicago), paper DETC2012-70094, 2012.
- [8] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., *Detection and Quantitative Assessment of Damages in Beam Structures Using Frequency and Stiffness Changes*, Key Engineering Materials, 569, pp. 1013-1020, 2013.
- [9] Kec, W., Toma, A., *The quasi-static generalized equation of the vibrations of the elastic bars with discontinuities*, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, 15(4), pp. 388-395, 2014.

- [10] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Negru, I., *Damages influence on dynamic behaviour of composite structures reinforced with continuous fibers*, Materiale Plastice, 49(3), pp. 186-191, 2012.
- [11] Deraemaeker, A., Preumont, A., Kullaa, J., *Modeling and removal of environmental effects for vibration based SHM using spatial filtering and factor analysis*, Proceedings of IMAC XXIV, St Louis, USA, 2006.
- [12] Bejan, M., *În lumea unităților de măsură*. Ediția a doua revăzută și adăugită. Editura Academiei Române și Editura AGIR, București, 2005.

Drd.Ing. Horia FURDUI  
Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița,  
e-mail: h.furdui@uem.ro

Prof.univ.Dr.Ing.ec. Gilbert-Rainer GILLICH  
Prorector Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița,  
membru AGIR  
e-mail: gr.gillich@uem.ro

Lector Dr. Andrea Amalia MINDA  
Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița,  
e-mail: a.minda@uem.ro