



A XVII-a Conferință internațională – multidisciplinară  
„Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”  
SEBEȘ, 2017

## **DESPRE MODIFICAREA FRECVENȚELOR NATURALE ALE GRINZILOR DATORITĂ COROZIUNII**

Emilian STANCIU, Zeno-Iosif PRAISACH, Gilbert-Rainer GILLICH

### **ON THE NATURAL FREQUENCY CHANGES OF BEAMS DUE TO CORROSION**

This paper presents a relation to be used for deriving the effect of mass loss on the natural frequencies of beams. Herein the stiffness decrease is not considered, since its effect on the natural frequencies is well-known. Consequently, the beam was considered with a constant cross-section but with reduced volumetric mass density in the corroded region. By this approach, we have first analytically studied the beam dynamics from an energetic point of view and contrived the mathematical relation. Afterwards, this relation was successfully tested against FEM simulations.

Keywords: beam, corrosion, vibration, natural frequencies, mode shape

Cuvinte cheie: grindă, coroziune, vibrații, frecvențe naturale, formă modală

### **1. Introducere**

Pentru a detecta de timpuriu defectele care apar în structuri, acestea trebuie verificate în mod regulat [1]. În acest scop se folosesc diverse metode de control nedistructiv. Metodele clasice de control vizual, analiza cu raze X sau cea cu ultrasunete sunt metode de control local care permit detectarea precisă a defectelor. Dezavantajul acestor metode constă în faptul că ele necesită cunoașterea zonei unde este localizat defectul. Metodele dinamice însă, având un caracter global,

pot indica eventualele defecte ale unei structuri mari. De asemenea, cu ajutorul acestora, se poate localiza zona cu defect. Faptul de a nu mai avea neapărat nevoie de acces la zona care trebuie inspectată reprezintă principalul avantaj ale metodei dinamice. Dar o metodă nu o exclude pe cealaltă, dimpotrivă ele se completează reciproc [1].

## 2. Considerente teoretice

În această secțiune se introduce o relație matematică dedusă de autori, care evaluează modificările frecvențelor datorate pierderii de masă. Cazul este ilustrat pentru o grindă încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt. În acest exemplu, asimetria geometrică asigură o legătură fără echivoc între diferențele de masă, definite prin poziție și intensitate, respectiv modificarea frecvenței. Se analizează o grindă prismatică din oțel, care are următoarele caracteristici: lungimea  $L = 1$  m, iar secțiunea transversală dreptunghiulară are lățimea  $B = 50$  mm și grosimea  $H = 5$  mm, de unde rezultă aria secțiunii transversale  $A = B \cdot H$  și momentul de inerție  $I = (B \cdot H^3)/12$ . Proprietățile fizico-mecanice sunt: densitatea  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, modulul de elasticitate longitudinală  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> și coeficientul lui Poisson  $\mu = 0,3$ . Accelerația gravitațională este  $g = 9,806$  m/s<sup>2</sup>, masa grinzii  $m = 1,9625$  kg.

Grinda supusă pierderii de masă  $m_a$  distribuită uniform pe un segment de lungime  $\Delta L$ , localizat între punctele  $a$  și  $b$ , este prezentată în figura 1, unde este de asemenea reprezentat și modelul grinzii. În model, pierderea totală de masă este obținută prin scăderea densității segmentului corodat (marcat cu gri deschis). Astfel, rigiditatea grinzii se menține neschimbată.

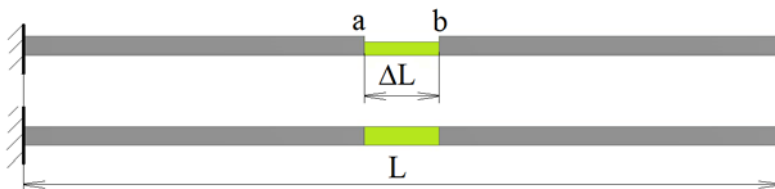


Fig. 1 Grinda în consolă cu o zonă corodată și modelul imaginat care consideră scăderea densității și menținerea rigidității constante

Pentru grinda în consolă din figura 1, ecuația transcendențială caracteristică este:

$$\cos \lambda \cosh \lambda + 1 = 0 \quad (1)$$

Prin urmare, forma modului de vibrație de încovoiere este definită ca:

$$w_i(x) = \cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i L + \cosh \lambda_i L}{\sin \lambda_i L + \sinh \lambda_i L} (\sinh \lambda_i x - \sin \lambda_i x) \quad (2)$$

unde  $\alpha_i$  este coeficientul de undă adimensional. Pentru a normaliza forma modului este necesară multiplicarea cu 0,5. În plus, frecvența naturală  $f_i$  pentru al  $i$ -lea mod de vibrație de încovoiere al unei grinzi pentru orice tip de rezemare, se obține din relația:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (3)$$

Pentru a găsi influența pierderii de masă asupra dinamicii grinzii în consolă, aceasta se consideră a fi continuă și fără masă. O masă  $m_E$ , poziționată la capătul liber, parcurge într-un sfert de perioadă ( $0,25 \cdot T_i$ ) distanța  $w_i(L)$ . O altă masă  $m_P$ , situată la distanța  $x$  față de capătul încastat, parcurge în același timp distanța  $w_i(x)$ . Ecuația (2) permite calculul acestor distanțe pentru oricare punct  $x$  de pe grindă.

Figura 2.a prezintă cazurile unei mase localizate la capătul liber, în timp ce figura 2.b prezintă o masă într-o poziție intermediară, ambele pentru modul de vibrație de încovoiere doi.

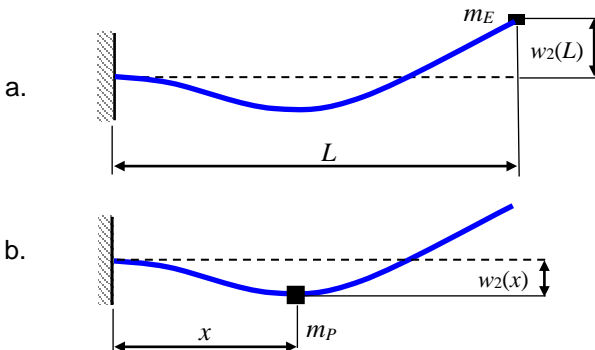


Fig. 2 Sisteme echivalente dinamic, având masa localizată în poziții diferite

Energia cinetică calculată pentru masa de tip  $m_E$  este:

$$U_{Ki}(L) = \frac{m_E}{2} \left[ \frac{w_i(L)}{T_i} \right]^2 \quad (4)$$

Pentru masa  $m_P$  localizată la distanța  $x$ , adică cazul general, energia cinetică este dată de formula:

$$U_{Ki}(x) = \frac{m_P}{2} \left[ \frac{w_i(x)}{T_i} \right]^2 \quad (5)$$

Dacă energiile cinetice în cele două cazuri sunt egale, atunci pentru ambele se obține aceeași frecvență naturală. Dependența dintre cele două mase  $m_E$  și  $m_P$  pentru al  $i$ -lea mod de vibrație rezultă din ecuațiile (4) și (5), ca fiind:

$$m_{Ei} = m_P \left[ \frac{w_i(x)}{w_i(L)} \right]^2 = m_P [\bar{w}_i(x)]^2 \quad (6)$$

Nota bene, pentru grinda în consolă, cele mai mari deplasări se realizează întotdeauna la capătul liber, deci  $\bar{w}_i(x)$  este obținută prin normalizare și denotă deplasarea transversală adimensională pentru un punct situat la distanța  $x$  față de capătul fix. Evident că  $[\bar{w}_i(x)]^2$  ia valori între zero și unu. În cazul grinzilor în consolă, ecuația (6) arată că elementul care are cea mai importantă contribuție la energia cinetică totală se află la capătul liber. De asemenea, rezultă că orice masă localizată la distanța  $x$  față de capătul fix, poate fi înlocuită cu o masă echivalentă localizată la capătul liber. Factorul de scalare folosit pentru aflarea masei echivalente este dat de pătratul formei modului normalizat  $[\bar{w}_i(x)]^2$ . Din punct de vedere dinamic, masa echivalentă a grinzii este obținută prin însumarea maselor echivalente a tuturor tronsoanelor înguste de grindă. În figura 3, este ilustrat cazul celui de-al doilea mod de vibrație. De fapt, masa echivalentă totală a grinzii  $\bar{m}_{i-eq}$  poziționată la capătul liber, corespunzător celui de-al  $i$ -lea mod de vibrație se obține prin multiplicarea masei specifice  $\bar{m}$  cu suprafața situată sub curba  $[\bar{w}_i(x)]^2$ . Prin urmare, masa echivalentă totală este:

$$m_{i-eq} = \bar{m}L \int_0^L [\bar{w}_i(x)]^2 dx = \zeta_i^{0-L} \bar{m}L = 0.25\bar{m}L \quad (7)$$

Prin urmare, frecvența poate fi exprimată în raport cu masa echivalentă, ca fiind:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{4m_{i-eq}L^3}} \quad (8)$$

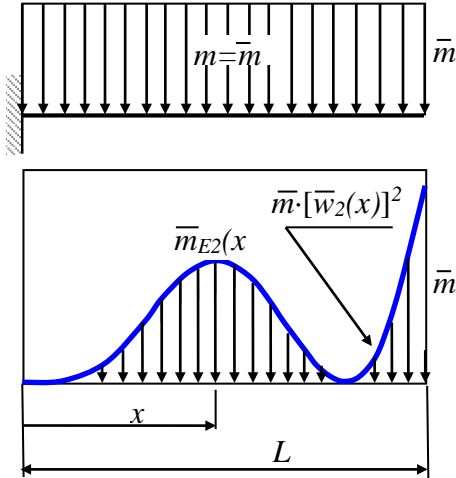


Fig. 3 Încărcarea unei grinzi în consolă cu o masă uniform distribuită și participarea masei la energia cinetică în modul doi de vibrație în funcție de poziția ocupată pe grindă

Contribuția la energia cinetică totală poate fi dedusă din ecuația (7), ca sumă a participării masei tuturor elementelor constitutive ale grinzii. Participarea masei individuale ia în considerare distanța parcursă într-un sfert de perioadă ( $0,25 \cdot T_i$ ), astfel încât ea este diferită pentru diversele moduri de vibrație. Figura 4 indică participarea masei normalizate a celor 100 de elemente ale grinzii, pentru modul doi de vibrație de încovoiere.

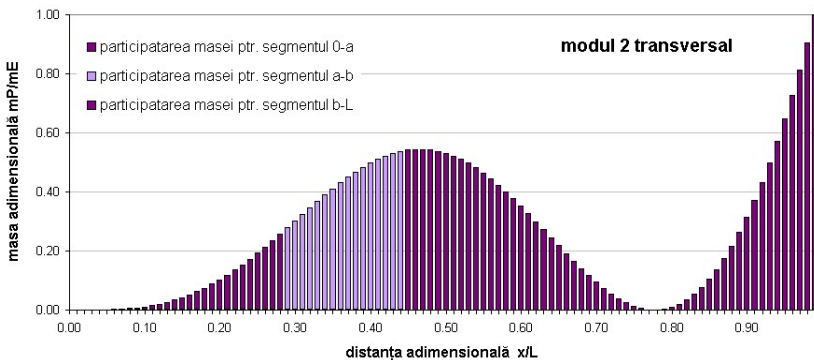


Fig. 4 Participarea masei la energia cinetică totală, în cazul sarcinilor distribuite uniform, pentru cele 100 de elemente ale grinzii – modul 2 de vibrație

În continuare considerăm grinda cu o secțiune transversală uniformă, încărcată cu o masă suplimentară, pe segmentul de grindă de lungime  $\Delta L$  situat între punctele  $a$  și  $b$ . Sarcina a fost aplicată într-o manieră care să nu afecteze rigiditatea grinzii. Aceasta poate fi modelată de o densitate scăzută, obținându-se pe acest segment o masă specifică  $\bar{m}_R$  micșorată. Contribuția masei echivalente pe acest segment supus unei creșteri de masă, este:

$$m_{Ri-eg}^{a-b} = \bar{m}_R L \int_a^b [\bar{w}_i(x)]^2 dx = \zeta_i^{a-b} \bar{m}_R L \quad (9)$$

Masa specifică echivalentă totală, care contribuie la energia cinetică, se obține prin însumarea maselor specifice echivalente ale acestui segment și ale celorlalte două segmente care nu sunt supuse nici unei mase adiționale. Aceste ultime două mase sunt:

$$m_{i-eg}^{0-a} = \bar{m} L \int_0^a [\bar{w}_i(x)]^2 dx = \zeta_i^{0-a} \bar{m} L \quad (10)$$

$$m_{i-eg}^{b-L} = \bar{m} L \int_b^L [\bar{w}_i(x)]^2 dx = \zeta_i^{b-L} \bar{m} L \quad (11)$$

unde  $\zeta_i^{0-a}$ ,  $\zeta_i^{a-b}$  și  $\zeta_i^{b-L}$  reprezintă coeficienții de participare a masei pentru segmentele  $0-a$ ,  $a-b$  și respectiv  $b-L$ .

Figura 5 prezintă participarea masei pentru o grindă cu densitate scăzută a masei pe un segment cu limitele  $a = 0,3 L$  și  $b = 0,45 L$ . Se poate observa distorsiunea coeficientului de participare a masei la energia totală a grinzii între punctele  $a$  și  $b$ . Pe acest segment masa distribuită are ca efect scăderea energiei cinetice.

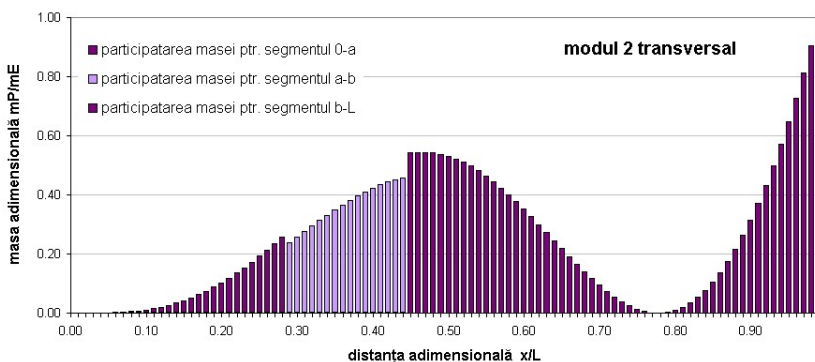


Fig. 5 Participarea masei la energia cinetică pentru cele 100 de elemente ale grinzii, în cazul pierderii de masă – modul 2 de vibrație

În cazul în care considerăm rigiditatea ca fiind uniformă, frecvențele naturale pentru grinda cu masă mai mică, de exemplu  $\bar{m}_R < \bar{m}$ , între punctele  $a$  și  $b$ , sunt:

$$f_{Ri} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\left(m_{i-eq}^{0-a} + m_{Ri-eq}^{a-b} + m_{i-eq}^{b-L}\right)L^3}} \quad (12)$$

sau, considerând coeficienții de participație a masei:

$$f_{Ri} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\left(\zeta_i^{0-a}\bar{m} + \zeta_i^{a-b}\bar{m}_R + \zeta_i^{b-L}\bar{m}\right)L^4}} \quad (13)$$

Din ecuațiile (8) și (13), frecvențele naturale ale grinzii cu masă modificată funcție de frecvențele grinzii uniforme, se obțin ca fiind:

$$f_{Ri} = f_i \sqrt{\frac{\zeta_i^{0-L}\bar{m}}{\zeta_i^{0-a}\bar{m} + \zeta_i^{a-b}\bar{m}_R + \zeta_i^{b-L}\bar{m}}} \quad (14)$$

În aplicațiile practice, cum ar fi detectarea defectelor sau controlul vibrațiilor, abaterea de frecvență cauzată de modificarea masei este importantă. Aceasta este:

$$\Delta f_{Ri} = f_i \left( \sqrt{\frac{\zeta_i^{0-L}\bar{m}}{\zeta_i^{0-a}\bar{m} + \zeta_i^{a-b}\bar{m}_R + \zeta_i^{b-L}\bar{m}}} - 1 \right) \quad (15)$$

Datorită faptului că relația dedusă pentru exprimarea frecvenței modurilor de vibrație de încovoiere ale unei grinzi încărcate neuniform conține doar termeni ce depind de modul de rezemare (forma modală și numerele de undă), relația este valabilă pentru orice tip de rezemare.

### 3. Verificare numerică

Pentru a demonstra corectitudinea relațiilor matematice deduse, au fost realizate o serie de simulări utilizând metoda elementelor finite (FEM), investigația fiind efectuată cu programul ANSYS 12, modulul „Analiză modală”. Cercetarea inițială a luat în considerare grinda uniformă, așa cum a fost descrisă în secțiunea anterioară.

După aceea au fost luate în considerare grinzi ce prezentau o distribuție neuniformă a masei. Cazurile particulare sunt individualizate prin extinderea (segmente mai lungi respectiv mai scurte) și intensitatea (densități diferite) defectului. Parametrii regiunilor supuse modificării de masă sunt prezentate clar în tabelul 1.

Tabelul 1

Scenariul	Densitatea $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Limita stg. $a$ [mm]	Limita dr. $b$ [mm]	Extindere $\Delta L$ [mm]
A	4000	300	400	100
B	2000	700	750	50
C	4000	100	110	10
D	2000	150	160	10

Primele trei frecvențe naturale ale modului transversal de vibrație sunt deduse analitic (vezi tabelul 2) și cu ajutorul FEM (vezi tabelul 3), în scopul obținerii valorii de referință.

Tabelele 2 și 3 prezintă de asemenea rezultatele rezultate pentru cele patru scenarii imaginare, prin folosirea ecuației (14) și a simulărilor FEM.

Conformitatea între rezultatele obținute analitic cu cele obținute prin analiza prim MEF confirmă valabilitatea ecuațiilor deduse.

Tabelul 2

Modul $i$	Încărcare uniformă	Încărcare în trepte	
	$f_i$ [Hz]	Scenariul	$f_{Ri}$ [Hz]
1	4,07690	A	4,08977
		B	4,20082
		C	4,07691
		D	4,07699
2	25,54951	A	26,52667
		B	25,65486
		C	25,55209
		D	25,56472
3	71,53939	A	75,09158
		B	73,74612
		C	71,58216
		D	71,75063

Din tabelele 2 și 3, se observă o bună conformitate între frecvențelor deduse analitic și cele rezultate din simulării FEM. O imagine și mai bună o obținem dacă utilizăm valorile adimensionale ale modificărilor frecvențelor, determinate cu relația

$$\Delta \tilde{f}_{Ri} = \frac{\Delta f_{Ri}}{f_i} = \sqrt{\frac{\zeta_i^{0-L} \bar{m}}{(\zeta_i^{0-a} \bar{m} + \zeta_i^{a-b} \bar{m}_R + \zeta_i^{b-L} \bar{m})}} - 1 \quad (16)$$

și prezentate în tabelul 4.



Tabelul 3

Modul $i$	Încărcare uniformă	Încărcare în trepte	
	$f_i^{FEM}$ [Hz]	Scenariul	$f_{Ri}^{FEM}$ [Hz]
1	4,08986	A	4,10330
		B	4,21423
		C	4,08963
		D	4,08979
2	25,62655	A	26,62145
		B	25,73864
		C	25,62894
		D	25,64190
3	71,75447	A	75,53598
		B	74,09155
		C	71,79798
		D	71,96386

Tabelul 4

Modul $i$	Scenariul	$\Delta \tilde{f}_{Ri}$ [%]	$\Delta \tilde{f}_{Ri}^{FEM}$ [%]
1	A	0,315681	0,328618
	B	3,039564	3,040935
	C	0	0
	D	0	0
2	A	3,824574	3,882302
	B	0,412337	0,437398
	C	0,010098	0,009326
	D	0,059531	0,059899
3	A	4,965362	5,270069
	B	3,084636	3,257051
	C	0,059785	0,060637
	D	0,295278	0,291815

#### 4. Concluzii

■ Lucrarea introduce un model matematic, care ne permite să anticipăm comportamentul la vibrații al structurilor cu pierderi de masă, dacă rigiditatea nu este afectată. Analizând tabelul 4 se poate concluziona că relația matematică dedusă este precisă, observându-se o bună similitudine între rezultatele obținute analitic și prin FEM.

■ Relația poate fi utilizată în completarea relației deduse de autori pentru calculul frecvențelor grinzilor cu discontinuități geometrice în care se neglijează pierderile de masă. Acest lucru este posibil

deoarece s-a dovedit că principiul suprapunerii efectelor poate fi aplicat în astfel de cazuri.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B. Shevitz, D.W., *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review*, Report No. LA 13070-MS, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, 1996
- [2] Friswell, M.I. Mottershead, J.E., *Finite element model updating in structural dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1995
- [3] Salawu, O.S., *Detection of structural damage through changes in frequency: a review*, Engineering Structures, 19(9), 1997, pp. 718-723.
- [4] Stubbs, N. Kim, J.T., Topple, K., *An effect and robust algorithm for damage localization in offshore platforms*, Proceedings of ASCE 10th Structural Congress, San Antonio, Texas, 1992, pp. 543-546.
- [5] Hatiegan, C., Gillich, G.R., Raduca, M., Raduca, E., Budai, A.M., Muntean, F., *Finite Element Analysis of Natural Frequencies and Mass Participation Coefficients for Thin Plates With Defects*, Scientific Bulletin of "Politehnica" University of Timisoara, 57 (71), 2012, 2.
- [6] Gillich, G.R. Praisach, Z.I., Furdui, H., Ntakpe, J.L., Minda, A.A., *Evaluation of loss of mass due to corrosion using vibration-based methods*, Applied Mechanics and Materials 658, 2014, pp. 77-82.
- [7] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Iancu, V., Furdui, H., Negru, I., *Natural Frequency Changes due to Severe Corrosion in Metallic Structures*, Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering, 61 (12), 2015, pp. 721-730.
- [8] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Wahab, M.A., Gillich, Nicoleta, Mituletu, I.C., Nătescu, C., *Free vibration of a perfectly clamped-free beam with stepwise eccentric distributed masses*, Shock and Vibration, 2016.

Drd.Ing.Ec. Emilian STANCIU

Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița, membru AGIR

e-mail: e.stanciu@uem.ro

Dr.Ing.Habil. Zeno-Iosif PRAISACH

S.C. UCMR S.A. Reșița, membru AGIR

e-mail: zpraisach@yahoo.com

Prof.Univ.Dr.Ing.Ec. Gilbert-Rainer GILLICH

Director CSUD,

Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița, membru AGIR

e-mail: gr.gillich@uem.ro