



A XVIII-a Conferință internațională – multidisciplinară
„Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”
CLUJ NAPOCA, 2018

UNELE PARTICULARITĂȚI PRIVIND MIȘCAREA CORPURILOR DE REVOLUȚIE SUBȚIRI PE TRAIECTORIA DE ZBOR, ÎN PREZENȚA UNDEI DE ȘOC CONICE

Constantin AVĂDANEI

SOME PARTICULARITIES CONCERNING THE MOTION OF BODIES OF REVOLUTION'S FLIGHT TRAJECTORY THIN, CONICAL SHOCK WAVE

The paper presents a contribution to the aerodynamic body of revolution movement trajectories in the thin atmosphere. As a particular case, the paper refers to flying projectiles and missiles, to customize linear stationary movements around thin bodies of revolution.

Keywords: projectile, missile, speed potential, Mach number, angle of attack, conical shock wave

Cuvinte cheie: proiectil, rachetă, potențialul vitezelor, numărul Mach, unghi de atac, undă de șoc conică

1. Introducere

Studiul zborului corpurilor de revoluție subțiri pe traiectorii în atmosferă este un demers deosebit de complex. Studiul se referă cu precădere la fenomenele aerodinamice care însoțesc zborul proiectilelor și rachetelor din domeniul militar.

Pătrunderea în tainele fenomenului mișcării (zborului) proiectilului sau rachetei presupune abordarea unor delicate probleme

de mecanică, aerodinamică, propulsie reactivă, fizica atmosferei, și teoria probabilităților, utilizând un aparat matematic adecvat.

Răspunzând la problemele amintite, se pun la dispoziția proiectanților metodele de proiectare necesare pentru realizarea maximizării performanțelor balistice impuse.

În continuare se prezintă o contribuție la înțelegerea fenomenelor aerodinamice care însoțesc mișcarea corpurilor subțiri în atmosferă utilizând un instrument teoretic abordat de Mecanica fluidelor.

2. Aspecte ale mișcării corpurilor de revoluție subțiri în regim supersonic

Pentru studiul mișcării fluidelor la viteze mari ($v > a$) se utilizează modelul fluidului ideal compresibil.

Ecuatiile Mecanicii fluidelor au forma de mai jos [1], [6], în condițiile unor ipoteze simplificatoare: se neglijează vâscozitatea și conductibilitatea ($\mu = 0$, $\lambda = 0$), variația densității ($\rho \neq \text{const}$), neglijarea forțelor masice ($\vec{f} = 0$), evoluție adiabatică,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \nabla \right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(i + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3)$$

la care se atașează ecuația de stare,

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (4)$$

În condițiile ipotezelor simplificatoare, pentru o evoluție adiabatică, ecuația presiunii are forma:

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-2} \frac{p}{\rho} = C \quad (5)$$

în care: $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, $\frac{\gamma p}{\rho} = a^2$, a fiind viteza locală a sunetului,

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

Criteriul compresibilității este numărul lui Mach (M) definit prin raportul dintre viteza fluidului și viteza sunetului: $M = \frac{v}{a}$.

Studiul mișcării în jurul corpurilor de rotație subțiri se efectuează în coordonate cilindrice, figura 1.

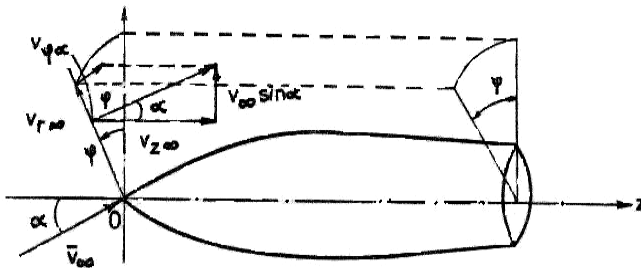


Fig.1 Studiul mișcării în jurul corpurilor de rotație subțiri efectuat în coordonate cilindrice

Ecuția fundamentală a dinamicii fluidelor ideale compresibile, este de forma [5], [6]:

$$\left(1 - \frac{v_x^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v_y^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{v_z^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{2v_x v_y}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{2v_x v_z}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{2v_y v_z}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0 \quad (6)$$

Pentru acest studiu mecanica fluidelor utilizează noțiunea de potențialul vitezelor în mișcări staționare a fluidelor ideale [2], [3].

În acest caz ecuația potențialului are expresia:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\bar{v}}{2a^2} \operatorname{grad} v^2 \quad (7)$$

unde : a reprezintă viteza locală a sunetului,

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma RT = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} v^2, \quad (8)$$

$a_0^2 = \gamma RT_0$, T_0 = temperatura de stagnare, R = constanta gazului.

Ecuția diferențială (6) a potențialului vitezelor în coordonate cilindrice devine:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{v_z^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(1 - \frac{v_\varphi^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} - \\ & - \frac{v_z v_r}{a^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) - \frac{v_r v_\varphi}{a^2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \varphi}\right) - \\ & - \frac{v_\varphi v_z}{a^2} \left(\frac{\partial v_z}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right) + \frac{v_r}{r} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

sau, introducând potențialul Φ , avem componentele vitezei [4], [6]

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\varphi = \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} \quad (10)$$

și se deduce în final ecuația diferențială a potențialului în coordonate cilindrice:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{v_z^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{v_\varphi^2}{a^2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \\ & - 2 \frac{v_z v_r}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} - \frac{2 v_r v_\varphi}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \varphi \partial r} - \frac{2 v_\varphi v_z}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial \varphi \partial z} + \\ & + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{v_\varphi^2}{a^2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Dacă în ecuația (11) se introduc notațiile din figura 1, atunci rezultă forma:

$$\begin{aligned} & (v_z^2 - a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + (v_r^2 - a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} (v_\varphi^2 - a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \\ & + 2v_z v_r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} + \frac{2}{r} v_z v_\varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \varphi} + \frac{2}{r} v_r v_\varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{v_r (a^2 + v_\varphi^2)}{r} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

în care se consideră: $v_z = v_\infty + v'_z$; $v_r = v'_r$; $v_\varphi = v'_\varphi$,

unde perturbațiile $v'_z, v'_r, v'_\varphi \ll v_\infty$,

$$v_z^2 \cong v_\infty^2 + 2v_\infty v'_z; v_r^2 = v_r'^2; v_\varphi^2 = v_\varphi'^2; \Phi = \Phi_\infty + \Phi' \quad (13)$$

$$a^2 \cong a_\infty^2 - (\gamma - 1)v_\infty v'_z$$

$$\left(1 - M_\infty^2\right) \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

Ecuția (14) este ecuația diferențială a potențialului vitezei perturbate[4][6], care se folosește pentru studiul mișcării din jurul corpurilor de rotație subțiri, la unghiuri de atac mici, adică a mișcărilor cu perturbații mici, neaxial simetrice.

În cazul mișcărilor axial simetrice la unghiul de atac nul ($v'_\varphi = 0$), iar ecuația (14) ia forma:

$$\left(1 - M_\infty^2\right) \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

3. Mișcarea corpurilor de revoluție subțiri în prezența undei de șoc conice

Atât teoretic cât și experimental s-a constatat că la viteze ce depășesc valoarea de 1,4 M (Mach), pentru corpurile care au partea din față conică(ascuțită), undele de șoc ce se formează în această zonă au formă conică. Undele de șoc însoțesc întotdeauna curgerea aerului în jurul acestor corpuri.

Aceste configurații se regăsesc în construcția proiectilelor și rachetelor care zboară pe o traiectorie în regim supersonic.

Se presupune că partea din față a proiectilului sau rachetei este de formă ascuțită (figura 2), și că peretele, în zona vârfului, formează cu direcția curentului de aer din amonte un unghi γ_a cuprins între 90° și 180° [5], [8].

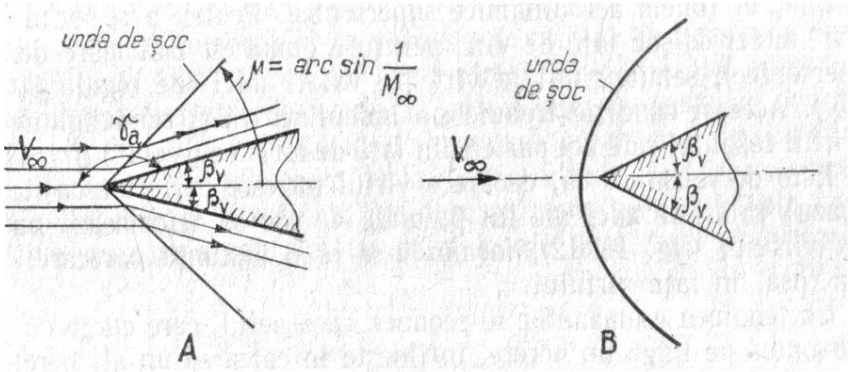


Fig. 2 Formarea unei unde de șoc conice la profile ascuțite

În acest caz, peretele „se opune curgerii”, curentul schimbându-și brusc direcția și este frânat brusc; în acest mod apare saltul brusc de presiune, adică unda de șoc (vârful se comportă ca o sursă ce emite continuu perturbații).

Dacă partea din față este conică și ascuțită, semiunghiul la vârful conului fiind β_v , suprafața în care se produce saltul de presiune (unda de șoc) (figura 2) poate fi conică, generatoarea conului fiind înclinată față de axă cu unghiul lui Mach $\mu = \arcsin \left(\frac{a_\infty}{V_\infty} \right)$.

Pentru o evaluare analitică a unei unde de șoc conice se utilizează schema din figura 3 [5], [8].

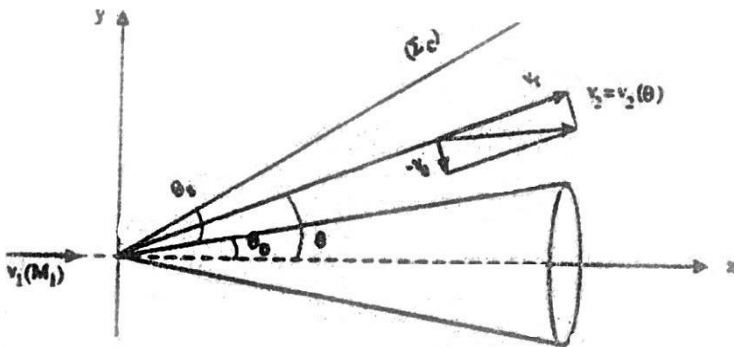


Fig. 3 Schema de evaluare analitică a unei unde de șoc conice

Mișcarea staționară supersonică axial-simetrică a unui fluid ideal în jurul unui con circular, care are semiunghiul θ_0 la vârf, este însoțită de formarea undelor de șoc de formă conică (Σ_c). Undele de șoc conice au același vârf cu conul perturbator și sunt coaxiale cu acesta.

În coordonatele polare, mișcarea fluidului din jurul conului, se exprimă prin ecuația diferențială[5]:

$$\left(1 - \frac{v_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(1 - \frac{v_\theta^2}{a^2}\right) \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{a^2} \left(\frac{\partial v_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{2v_r}{r} + v_\theta \frac{\cot \theta}{r} = 0 \quad (16)$$

Deoarece mișcarea este axial-simetrică, potențială și izentropică (în amonte și în aval de u da de șoc) se adoptă ipoteza că singura variabilă în ecuația (16) este θ iar potențialul mișcării se alege de forma:

$$\varphi = rV(\theta) \quad (17)$$

Înlocuind relația (17) în (16) și notând :

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V(\theta); v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = V', \quad (18)$$

Se ajunge la forma:

$$\left(1 - \frac{V'^2}{a^2}\right) V'' + \cot \theta V' + \left(2 - \frac{V'^2}{a^2}\right) V = 0 \quad (19)$$

la care se atașează condițiile la limită:

- pentru $\theta = \theta_0$:

$$v_\theta = \frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (20)$$

- pentru $\theta = \theta_s$ sunt valabile relațiile de la unda de șoc oblică plană, inclusiv cea referitoare la variația entropiei. Astfel se obține:

$$\frac{V}{v_1} = - \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \theta_s} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \sin \theta_s \quad (21)$$

$$\frac{V}{v_1} = \cos\theta_s \quad (22)$$

Ecuția (19) împreună cu condițiile la limită (20),(21) și (22) permite studiul mișcării între unda de șoc conică (Σ_c) și suprafața conului proiectilului sau rachetei [5], [8].

Pentru rezolvarea ecuației (19) se face apel la metode numerice sau metode grafice.

O metodă analitică aproximativă, cu rezultate suficient de bune în domeniul $M > 1,3$ și $\theta \leq 40^\circ$, ia în considerare ecuația diferențială:

$$V'' + \cotg\theta V' + 2V = 0 \quad (23)$$

Soluția ecuației (23) este de forma:

$$\frac{V}{v_1} = \left(C \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta \cos^2\theta} + D \right) \cos\theta = \left[C \left(\frac{1}{\cos\theta} + \ln \left(\tan\frac{\theta}{2} \right) \right) \int_{\theta_2}^{\theta} + D \right] \cos\theta \quad (24)$$

Din care se deduc expresiile constantelor de integrare C și D:

$$C = \left(\frac{1}{\sin^2\theta_0 \cos\theta_0} + \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta \cos^2\theta} \right)^{-1} \quad (25)$$

$$D = 1 - C \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{d\theta}{\sin\theta \cos^2\theta} \quad (26)$$

Din relațiile (21) și (24) se obține relația cu ajutorul căreia se determină semiunghiul conului unde de șoc:

$$\sin^2\theta_s = \frac{1}{M_1^2} + C \frac{\gamma+1}{2\cos\theta_s} \quad (27)$$

care în situația perturbațiilor mici ($M_1 \sin\theta_0 \rightarrow \infty$) se reduce la:

$$\sin\theta_s = \frac{1}{M_1} \quad (28)$$

domeniul de aplicabilitate fiind $\theta \leq (5^\circ \dots 6^\circ)$

Dacă regimul de mișcare este hipersonic (teoretic $M_1 \sin \theta_0 \rightarrow \infty$) din relațiile (27) și (25) (luând $\theta_s \rightarrow \theta_0$) rezultă [5], [8]:

$$\sin^2 \theta_s = \frac{1}{M_1^2} + \frac{\gamma+1}{2} \sin^2 \theta_0 \quad (29)$$

În avalul undei de șoc conice, pentru calculul parametrilor se utilizează ecuația energiei:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} RT + \frac{1}{2} (V^2 + V'^2) = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0 = \frac{v_{max}^2}{2} \quad (30)$$

din care se deduce

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{V^2 + V'^2}{v_{max}^2} \quad (31)$$

Dacă p_{02} este presiunea totală (de stagnare) în avalul undei de șoc conice atunci:

$$\frac{p}{p_{02}} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 - \frac{V^2 + V'^2}{v_{max}^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (32)$$

Relațiile (31) și (32) permit calculul parametrilor termogazodinamici în mișcarea din avalul undei de șoc conice.

4. Concluzii

1. În cazul vitezelor hipersonice ale corpurilor ascuțite (proiectile, rachete), se adoptă forme geometrice care conduc la influențe minime ale perturbațiilor undei de șoc asupra stabilității pe traiectorie.

2. O configurație cu unghiuri mici la vârf ale corpurilor conduc la o atenuare mai accentuată a tipului de curgere a aerului în jurul acestora, de la hipersonic la subsonic.

Aceeași soluție constructivă o adoptă constructorii de motoare de avioane supersonice, prin plasarea unei piese ascuțite la intrarea jetului de aer în camera de ardere al motorului.

3. Bazele teoretice ale acestui studiu conduc la concluzii de ordin practic, care stabilesc configurații ale corpurilor subțiri, în domeniul civil și militar.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Avădanei, C., *Contribuții în studiul optimizării fenomenelor gazodinamice din dispozitivele armamentului de calibru redus*, Teză de doctorat, Academia Tehnică Militară, București, 1999.
- [2] Carafoli, E., Constantinescu, V., N., *Dinamica fluidelor compresibile*, Editura Academiei, București, 1984.
- [3] Comolet, R., *Mecanique experimentale des fluides*, Ed. Massou, Paris, 1961.
- [4] Landau, L., Lifchitz, E., *Physique theorique, Tome 6, Mecanique des fluides*, Edition Mir, Moscou, 1988.
- [5] Moraru, Fl., *Manual de balistică exterioară*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1976.
- [6] Ștefan, S., *Mecanica fluidelor*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1992-1993.
- [7] Ștefan, S., *Ecuatiile mecanicii fluidelor*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1996.
- [8] Ștefan, S., *Gazodinamica sistemelor reactante*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1994.

Lector Univ. Dr.Ing. Constantin AVĂDANEI
membru AGIR
costi_av_2003@yahoo.com