



A XI-a Conferință Națională multidisciplinară – cu participare internațională,
"Profesorul Dorin PAVEL – fondatorul hidroenergeticii românești",
SEBEȘ, 2011

MODELISATION DU COMPORTEMENT D'UN MULTICOUCHE DISSYMETRIQUE

Moussa KARAMA

MODELAREA COMPORTAMENTULUI UNUI MULTISTRAT ASIMETRIC

Structurile multistrat compozit au din ce în ce mai multe și mai frecvente utilizări pentru proiectarea structurilor mecanice. Depinzând de o luminozitate mare, ele sunt, în general, structuri rezistente, pentru a sprijini sarcini importante. În această lucrare se propune un nou model de structuri multistrat pentru a răspunde diverselor funcționalități: tratarea structurilor non-simetrice multistrat, verificarea exactă a condițiilor de frontieră, verificarea continuității pentru deplasări și tensiuni transversale de forfecare la interfețele structurilor multistrat, pentru a îmbunătăți rafinarea din punct de vedere al membranei și al forfecării transversale.

Cuvinte cheie: compozite asimetrice, elemente finite, modele rafinate, interfețe, forfecare transversală, membrană

MODELING THE BEHAVIOR OF DISSYMMETRICAL MULTI-LAYERS

The multi-layer composite structures are more and more frequently used for the design of mechanical structures. Dependent on a great lightness, they are in general structures resistant, likely to support important loadings. In this work we propose the new model of multilayer structures to answer the various following functionalities: to treat the non-symmetrical multi-layer structures, to check the boundaries conditions exactly, to check continuity for displacements and stresses shear transverse to the interfaces of the multilayer structures, to improve refinement of the terms of membrane and transverse shearing.

In the absence of exact solutions (for multi-layer the non-symmetrical ones) the validity of the model will be tested on problems resulting from three-dimensional solutions obtained by finite elements.

Keywords: asymmetric composite, finite elements, refined models, interfaces, transverse shear, membrane

Mots clés: composites dissymétriques, éléments finis, modèles raffinés, interfaces, cisaillement transverse, membrane

1. Introduction

Les travaux développés dans cette étude sont destinés (dans un premier temps) à la mise en place d'un nouveau modèle théorique destiné à la modélisation des structures multicouches et sandwichs (plaques) et à la mise en place (dans un deuxième temps) d'éléments finis (dans le domaine linéaire) basés sur ce modèle raffiné qui introduit trois fonctions essentielles:

- traiter les structures multicouches non-symétriques;
- la satisfaction exacte des conditions de continuité aux interfaces pour les déplacements et les contraintes, ainsi que les conditions aux limites;
- le raffinement des termes de membrane et de cisaillement transverse;
- l'amélioration du calcul des contraintes de cisaillement transverse (dans le cas de composites épais) sans recours à des coefficients de correction.

L'approche retenue est du type cinématique. Les raffinements des termes de membrane et de cisaillement sont pris en compte par l'intermédiaire de fonctions exponentielles/ou logarithmique suivant la variable d'épaisseur z , la continuité du champ de déplacement étant automatiquement assurée par l'introduction, dans le champ cinématique, de la fonction de Heaviside. Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont déduits du principe des puissances virtuelles. On ne conserve que cinq déplacements généralisés indépendants.

La validité du modèle est testée sur des problèmes pour lesquels une solution tridimensionnelle exacte existe. La sensibilité aux effets de bord est également examinée. La comparaison avec des calculs éléments finis est effectuée. Les développements visés sont effectués en trois étapes.

En l'absence de solutions exactes (pour les multicouches non symétriques) la validité du modèle sera testée sur des problèmes issus de solutions tridimensionnelles obtenues par éléments finis.

2. Modèles analytiques

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur). Mis à part les solutions exactes issues de l'élasticité sur des cas précis de plaques [1] [2] les recherches ont abouti à une diversité de modèles dont le souci principal est de prendre en compte les effets du cisaillement transverse.

En effet, la plupart de ces modèles n'assurent pas la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces des couches qui présentent des propriétés mécaniques différentes et ne traitent pas les structures non-symétriques.

Or, lors de la conception des structures multicouches, il est nécessaire de vérifier le processus de transfert de charge, donc la prise en compte des contraintes de cisaillement transverse, pour le dimensionnement.

Les différentes approches envisageables pour le traitement des plaques composites peuvent être regroupées de la façon suivante :

- Approche monocouche équivalente
- Approche continuité aux interfaces
- Approche développement asymptotique
- Approche tridimensionnelle

2.1. Fonctions de raffinement du cisaillement

Les différents travaux effectués sur le sujet peuvent être résumés (en citant les travaux les plus récents) selon l'historique suivant :

Structures symétriques [3]

$$f(x_3) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\pi \frac{z}{h}\right) \text{ et } g(x_3) = \frac{h}{\pi} \cos\left(\pi \frac{z}{h}\right) \quad (1)$$

Structures symétriques [4]

$$f(x_3) = x_3 \text{Exp} \left[-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \text{ et } g(x_3) = -x_3 \text{Exp} \left[-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2)$$

structures non-symétriques, modèle développé dans le cadre de cette étude

$$f(x_3) = \left(-\frac{h}{2} \right) \ln \left[\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \text{ et } g(x_3) = -x_3 \exp \left[-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (3)$$

Ce dernier modèle est introduit pour répondre à une insuffisance des modèles existants pour traiter les structures multicouches et sandwichs présentant une dissymétrie tant géométrique que matérielle. Dans le cas d'une plaque multicouche, la cinématique s'écrit alors :

$$U_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) = u_\alpha^0(x_1, x_2, t) - x_3 w_{,\alpha}(x_1, x_2, t) + h_\alpha(x_3) \varphi_\alpha(x_1, x_2, t) \\ \alpha = 1, 2$$

$$U_3(x_1, x_2, t) = w(x_1, x_2, t) \quad (4)$$

où

$$h_\alpha(x_3) = g(x_3) + \sum_{m=1}^{N-1} \lambda_\alpha^{(m)} \left[\frac{-x_3}{2} + \frac{f(x_3)}{2} + (x_3 - x_3^{(m)}) H(x_3 - x_3^{(m)}) \right]$$

$$f(x_3) = \left(-\frac{h}{2} \right) \ln \left[\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right]$$

fonction logarithmique de raffinement du cisaillement

$$g(x_3) = -x_3 \exp \left[-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right]$$

fonction exponentielle de raffinement membranaire et $H(x_3 - x_3^{(m)})$

distribution de Heaviside définie par:

$$H(x_3 - x_3^{(m)}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x_3 \geq x_3^{(m)} \\ 0 \text{ pour } x_3 < x_3^{(m)} \end{cases} \quad (5)$$

Cette cinématique permet de vérifier les conditions de continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces, ainsi que les conditions aux frontières.

2.2. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites avec continuité aux interfaces

On utilise le principe des puissances virtuelles pour établir les équations d'équilibre et les conditions aux limites:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(u_1)} &= N_{11,1} + N_{12,2} + \bar{n}_1 \\
 \Gamma^{(u_2)} &= N_{22,2} + N_{12,1} + \bar{n}_2 \\
 \Gamma^{(w)} &= M_{11,11} + M_{22,22} + M_{12,12} + M_{12,21} + (\bar{n}_3 + \bar{m}_{1,1} + \bar{m}_{2,2}) \quad (6) \\
 \Gamma^{(\varphi_1)} &= P_{11,1}^1 + P_{12,2}^1 - R_{13} + \bar{p}_1 \\
 \Gamma^{(\varphi_1)} &= P_{22,2}^2 + P_{12,1}^2 - R_{23} + \bar{p}_2
 \end{aligned}$$

les conditions aux limites naturelles s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 0 &= -N_{11} - N_{12} + \bar{N}_1 \\
 0 &= -N_{22} - N_{12} + \bar{N}_2 \\
 \bar{\Gamma}^{(w)} &= -M_{11,11} - M_{22,22} + M_{12,12} - M_{12,21} + (\bar{N}_3 - \bar{m}_1 - \bar{m}_2) \quad (7) \\
 0 &= -P_{11}^1 - P_{12}^1 + \bar{P}_1 \\
 0 &= P_{22}^2 + P_{12}^2 + \bar{P}_1 \\
 0 &= M_{11} + M_{12} - \bar{M}_1 \\
 0 &= M_{22} + M_{12} - \bar{M}_2
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} f_i dx_3, \quad \bar{N}_i = \int_{-h/2}^{h/2} F_i dx_3 \\
 \bar{m}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 f_i dx_3, \quad \bar{M}_i = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 F_i dx_3 \\
 \bar{p}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} h_1(x_3) f_i dx_3, \quad \bar{P}_i = \int_{-h/2}^{h/2} h_1(x_3) F_i dx_3 \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{ij} \\ M_{ij} \\ P_{ij}^\alpha \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_3 \\ h_\alpha(x_3) \end{Bmatrix} dx_3$$

$$P_{ij}^{\alpha} = \sum_{k=1}^n \int_{x_3^{k-1}}^{x_3^k} h_{\alpha}(x_3) \sigma_{ij} dx_3$$

$$R_{i3} = \int_{x_3^{k-1}}^{x_3^k} h_{\alpha,3}(x_3) \sigma_{i3} dx_3$$

En utilisant les solutions de Navier le système d'équilibre dans le cas statique devient:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= U \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right) \\ u_2(x_1, x_2) &= V \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right) \\ w(x_1, x_2) &= W \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right) \\ \varphi_1(x_1, x_2) &= X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right) \\ \varphi_2(x_1, x_2) &= Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

où, a et b sont les dimensions du multicouche, suivant les axes x_1 , respectivement x_2 . En notant $\alpha = \left(\frac{\pi}{a}\right)$ et $\beta = \left(\frac{\pi}{b}\right)$, les équations d'équilibre deviennent:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} & G_{31} & G_{41} & G_{51} \\ G_{12} & G_{22} & G_{32} & G_{42} & G_{52} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & G_{43} & G_{53} \\ G_{14} & G_{24} & G_{34} & G_{44} & G_{54} \\ G_{15} & G_{25} & G_{35} & G_{45} & G_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

2.3. Cas d'une plaque non symétrique avec 2 couches [0°/90°]

On traite ici le cas d'une plaque rectangulaire (figure 1) à deux couches d'épaisseurs égales et orientées [0°/90°].

Elle est soumise à une pression doublement sinusoïdale suivant sa longueur (x_1) et sa largeur (x_2), d'amplitude q_0 .

La plaque est simplement appuyée sur ses bords.

Le matériau est identique pour les deux couches, la couche 0° ayant comme propriétés mécaniques celles de Pagano [5],

$$E_L/E_T = 25, G_{LT}/E_T = 0,5, G_{TT}/E_T = 0.2, 0,25, E_T = 6,895 \text{ GPa},$$

$$\rho = 1600 \text{ kg/m}^3, a = 4, b = 3a, h = 1$$

$$q = q_0 \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b), q_0 = 1 \text{ MPa}$$

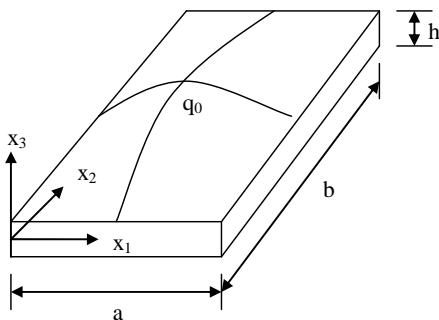


Figure 1 Plaque multicouche sous chargement doublement sinusoïdale

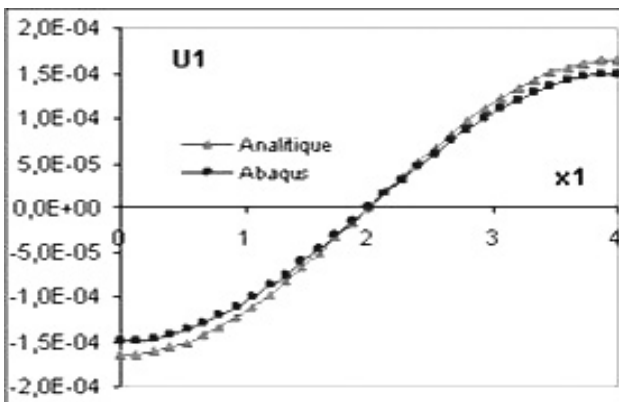


Figure 2 Variations de $u_1(x_1, x_2 = b/4, x_3 = -h/2)$ en fonction de x_1

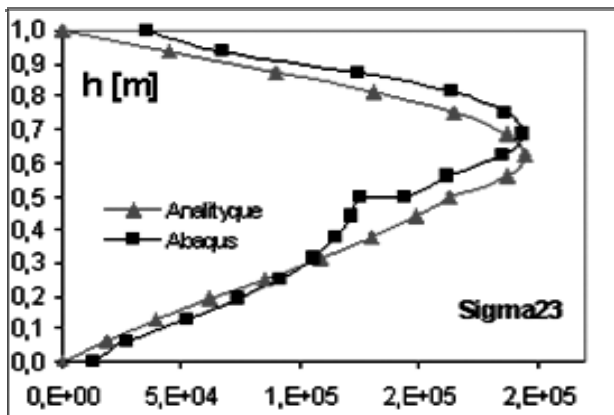


Figure 3 Variations de $\sigma_{23}(x_1 = a/2, x_2 = b/2, x_3)$ suivant la direction x_3

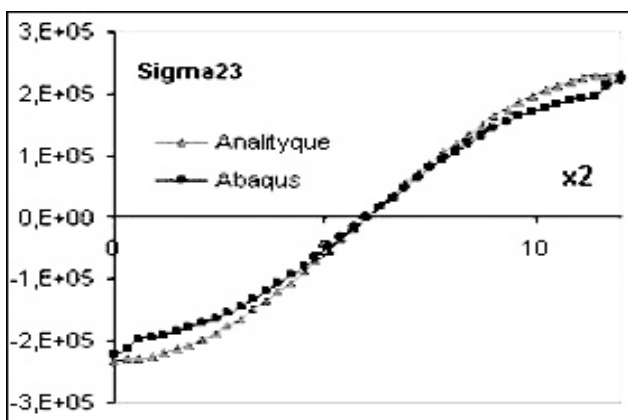


Figure 4 Variation de $\sigma_{23}(x_1 = a/2, x_2, x_3 = 0)$ suivant la direction x_2

3. Résultats

Les différents résultats concernent les déplacements et les contraintes obtenues par des méthodes analytiques (résolution du modèle développé dans le cadre de cette étude, voir détail de calcul à l'annexe) et des solutions obtenues par éléments finis.

4. Conclusion

Pour le modèle analytique d'une plaque à deux couches on observe qu'on a une bonne approximation pour la contrainte. Pour les contraintes de cisaillement on trouve des valeurs très approches par rapport au modèle numérique. Pour les déplacements on a une bonne corrélation sauf dans le déplacement U_2 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ossadzow, C., *Modélisation de coques composite multicouches*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1996.
- [2] Idlbi, A., *Comparaison de théories de plaque et estimation de la qualité des solutions dans la zone bord*, Thèse de Doctorat, ENSAM Paris, 1995.
- [3] Touratier, M., *An efficient standard plate theory*, Int. J. Engg Science, Vol. 29, no. 8, pp. 901-916, 1991.
- [4] Afaq, K., *Développement d'un nouveau modèle composite pour les structures composites multicouches et sandwiches avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, 2003.
- [5] Pagano, N.J., *Exact solutions for composite laminate in cylindrical bending*, J Compo. mater, Vol. 3, pp. 398- 411, 1969.

Annexe

Les coefficients de continuité

$$\lambda_1^{(1)} = -0,857143$$

$$\lambda_2^{(1)} = 0,857143$$

Les déformations

$$\varepsilon_{11} = U_{1,1} = u_{1,1}^{0*} - x_3 w_{,11} + h_1 \varphi_{1,1}$$

$$\varepsilon_{22} = U_{2,2} = u_{2,2}^{0*} - x_3 w_{,22} + h_2 \varphi_{2,2}$$

$$2\varepsilon_{23} = h_{2,3} \varphi_2$$

$$2\varepsilon_{13} = h_{1,3} \varphi_1$$

$$\varepsilon_{12} = U_{1,2} + U_{2,1} = u_{1,2}^{0*} - x_3 w_{,12} + h_1 \varphi_{1,2} + u_{2,1}^{0*} - x_3 w_{,21} + h_2 \varphi_{2,1}$$

Les contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = & \left(C_{11}^1 \left(-\alpha u_1 - x_3 \left(-\alpha^2 \right) w + h_{1,3} (-\alpha) \varphi_1 \right) \right. \\ & \left. + C_{12}^1 \left(-\beta u_2 - x_3 \left(-\beta^2 \right) w + h_{1,3} (-\beta) \varphi_2 \right) \right) \sin(\alpha x_1) \sin(\beta x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_1, x_2, x_3) = & \left(C_{12}^1 \left(-\alpha u_1 - x_3 \left(-\alpha^2 \right) w + h_{1,3} (-\alpha) \varphi_1 \right) \right. \\ & \left. + C_{22}^1 \left(-\beta u_2 - x_3 \left(-\beta^2 \right) w + h_{1,3} (-\beta) \varphi_2 \right) \right) \sin(\alpha x_1) \sin(\beta x_2) \end{aligned}$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = C_{44} h_{2,3} \varphi_2 \sin(\alpha x_1) \cos(\beta x_2)$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = C_{55} h_{1,3} \varphi_1 \cos(\alpha x_1) \sin(\beta x_2)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = C_{66} \left(\beta u_1 - x_3 \alpha \beta w + h_{1,3} \beta \varphi_1 + \alpha u_2 - x_3 \alpha \beta w + h_{2,3} \alpha \varphi_2 \right) \cos(\alpha x_1) \cos(\beta x_2)$$

$$\sigma_{33} = - \int_{x_3} \sigma_{23,2} \partial x_3 - \int_{x_3} \sigma_{13,1} \partial x_3$$

Prof. Dr. Ing. Moussa KARAMA
 Directeur de la recherche
 Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes, France
 e-mail: moussa.karama@enit.fr