A XV-a Conferință internațională – multidisciplinară
„Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”
SEBEȘ, 2015

UNELE ABORDĂRI PRIVIND DETERMINAREA VITEZEI DE DEPLASARE A UNEI RACHETE ÎN SPAŢIUL INTERPLANETAR

Constantin AVĂDANEI

SOME APPROACHES CONCERNING THE DETERMINATION OF THE VELOCITY OF A ROCKET INTO INTERPLANETARY SPACE

This paper presents a method of calculation for a fundamental parameter of the missile flight dynamics, movement speed in a fluid medium. It is used in this sense of angular momentum theorem and momentum theorem in fluid mechanics.

Keywords: rocket, reaction force, mass forces, trajectory, mass flow, volume control, non-inertial reference system, exhaust nozzle
Cuvinte cheie: rachetă, forţă de reacţie, forţe masice, traiectorie de zbor, debit masic, volum de control, sistem de referinţă neinerţial, ajutaj de evacuare

1. Introducere

Zborul rachetei are loc datorită forţei de propulsie, rezultată din mişcarea gazelor prin ajutajele practicate la camera de combustie a acesteia. Gazele, în cele mai dese cazuri, sunt generate prin reacţii termochimice cu degajare de mari cantităţi de căldură.

Dinamica zborului rachetei are loc pe o traiectorie de zbor, în care evoluează atât parametrii aerodinamici cât şi performanţele tehnice ale rachetei.

Teoretic, traiectoria de zbor se determină cu ecuaţia traiectoriei, care este o funcţie matematică cu mai multe variabile.

Mişcarea rachetei în aer este un fenomen complex, influenţat de atracţia gravitaţională, de acţiunea forţelor şi cuplurilor aerodinamice, de rotaţia Pământului, de variaţia parametrilor meteorologici cu altitudinea.

Pătrunderea în tainele fenomenului zborului rachetei presupune abordarea unor delicate probleme de mecanică, aerodinamică, propulsie reactivă, fizica atmosferei şi teoria probabilităţilor, utilizând un aparat matematic adecvat.

Răspunzând la problemele amintite, se elaborează de fapt metodele pentru determinarea datelor de proiectare necesare pentru realizarea performanţelor tehnice impuse: o traiectorie de zbor corectă, un program de dirijare conform cu calculele teoretice şi rezultatele simulărilor de laborator, precizia şi efectul la ţintă eficace.

2. Calculul forţei de reacţie a rachetei prin aplicarea teoremei impulsului

Exprimarea forţei de reacţie a rachetei se face în cazul când nu este necesară cunoaşterea soluţiei în fiecare punct al domeniului mişcării[2].

În acest caz aplicarea teoremei impulsului în mecanica fluidelor este utilă pentru că permite determinarea unor mărimi globale, cum ar fi forţa de reacţie a gazelor asupra rachetei.

Se consideră un volum de control V, delimitat de suprafaţa S, în interiorul unui fluid în mişcare, poziţionat în raport cu un sistem de referinţă inerţial $Oxyz$ (figura 1) [2], [3].

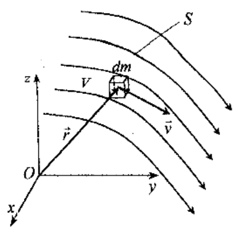

Fig.1 Mişcarea fluidului în sistemul de referinţă Oxyz

Dacă se notează cu v viteza centrului elementului de masă dm, poziţionat prin vectorul de poziţie $\vec{r}$, atunci impulsul elementar se exprimă sub forma [1], [6]:

$$d\vec{H} = dm \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot dV \qquad (1)$$

unde dV, este volumul elementar corespunzător masei dm.

Prin integrare se obţine expresia impulsului fluidului conţinut în volumul de control V la momentul t:

$$\vec{H} = \iiint_V \rho \vec{v}\, dV \qquad (2)$$

În mecanica teoretică teorema impulsului se deduce sub forma:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k \qquad (3)$$

iar în mecanica fluidelor se exprimă prin [3], [6]:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho \vec{v} dV = \vec{F}_m + \vec{F}_c \qquad (4)$$

unde $\vec{F}_m$ şi $\vec{F}_c$ reprezintă rezultantele forţelor masice exterioare, respectiv rezultantele forţelor exterioare de contact care acţionează asupra fluidului din volumul de control considerat.

Expresia forţei $\vec{F}_c$ conţine şi rezultanta $\vec{R}$ a interacţiunii fluid-perete simultan cu alte forţe de contact, precum forţele de presiune.

Volumul de control fiind funcţie de timp, $V = V(t)$ se poate reprezenta la momentele t şi $t + \Delta t$, ca în figura 2 [4], [6].

Componentele volumului se pot scrie sub forma:

$$V(t+\Delta t) = V_2(t+\Delta t) + V_3(t+\Delta t),\ \ V(t) = V_1(t) + V_2(t) \qquad (5)$$

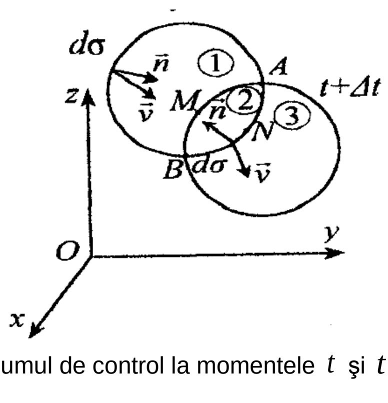

Fig. 2 Volumul de control la momentele t şi $t + \Delta t$

Ţinând cont de definiţia momentului cinetic, şi introducând expresiile (5) rezultă [6]:

$$\frac{d\vec{H}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}(t+\Delta t)-\vec{H}(t)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}_{V_2(t+\Delta t)}+\vec{H}_{V_3(t+\Delta t)}-\vec{H}_{V_1(t)}-\vec{H}_{V_2(t)}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}_{V_2(t+\Delta t)}-\vec{H}_{V_2(t)}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}_{V_3(t+\Delta t)}}{\Delta t}-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}_{V_1(t)}}{\Delta t} \qquad (6)$$

unde,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}_{V_2(t+\Delta t)}-\vec{H}_{V_2(t)}}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{v}\,dV \ ,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}_{V_3(t+\Delta t)}}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\iint_{SAMB}\rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma\cdot\Delta t}{\Delta t}=-\iint_{SAMB}\rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

(n - este normala interioară),

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{H}_{V_1(t)}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\iint_{SANB}\rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma\cdot\Delta t}{\Delta t}=-\iint_{SANB}\rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

şi în final rezultă:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\vec{v}\,dV=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{v}\,dV-\iint_S \rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma \qquad (7)$$

Introducând expresia (7) în expresia (4) se obţine relaţia care exprimă teorema impulsului în mecanica fluidelor[4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{v}\,dV-\iint_S \rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\vec{F}_m+\vec{F}_c \qquad (8)$$

În ipoteza că se neglijează rezultanta forţelor masice $\left(\vec{F}_m=0\right)$, iar mişcarea gazelor se consideră permanentă $\left(\frac{\partial(*)}{\partial t}=0\right)$, expresia (8) devine o altă formă de exprimare a teoremei impulsului [4], [6]:

$$-\iint_S \rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma=-\iint_S \rho\vec{v}\,dQ=\vec{F}_c \qquad (9)$$

unde

$$dQ=\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

exprimă debitul volumic elementar, $\vec{n}$ fiind normala interioară la suprafaţa S ce delimitează volumul de control V.

În cazul proiectării motoarelor rachetă, când se calculează integrala dublă (9), se adoptă $dQ > 0$ dacă fluidul intră în volumul de control şi $dQ < 0$ în cazul în care fluidul iese din volumul de control V [3].

În situaţia în care suprafaţa de control S se exprimă prin[6]:

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k \ , \quad \text{cu} \quad S_1 \bigcap S_j = \phi \ , \quad i, j = \overline{1,n} \ , \quad i \neq j \qquad (10)$$

iar parametrii mişcării sunt constanţi în orice secţiune S_k, $k = \overline{1,n}$, teorema impulsului scrisă sub forma (9) devine:

$$-\sum_{k=1}^{n} \rho (Q_k v_k) = \vec{F}_c \qquad (11)$$

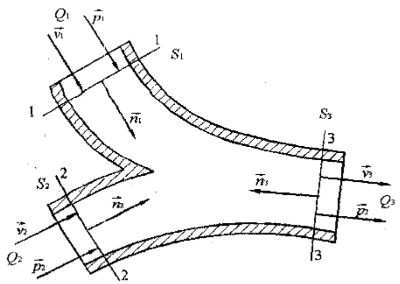

Fig. 3 Cazul parametrilor constanţi în orice secţiune S_k

Astfel, pentru un volum de control reprezentat în figura 3, $S = S_l \bigcup S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$, relaţia (11) se poate scrie:

$$-\rho Q_1 \vec{v}_1 - \rho Q_2 \vec{v}_2 + \rho Q_3 \vec{v}_3 = = p_1 S_1 \vec{v}_1 + p_2 S_2 \vec{v}_2 + p_3 S_3 \vec{v}_3 + \vec{R} \qquad (12)$$

unde $Q_1 + Q_2 = Q_3$, $\vec{R}$ fiind acţiunea peretelui asupra fluidului.

Dacă acţiunea fluidului asupra peretelui este $\vec{R}_p$, $\left(\vec{R}_p = -\vec{R}\right)$, relaţia (12) devine:

$$\vec{R}_p = p_1 S_1 \vec{v}_1 + p_2 S_2 \vec{v}_2 + p_3 S_3 \vec{v}_3 + \rho \left(Q_1 \vec{v}_1 + Q_2 \vec{v}_2 - Q_3 \vec{v}_3 \right) \qquad (13)$$

În cazul rachetei aflată în mişcare rectilinie în spaţiul interplanetar, calculele de proiectare se aplică în situaţia când volumul de control se raportează la un sistem de referinţă neinerţial (figura 4). Se notează [4], [5]:

$\vec{v}_0$ - viteza originii sistemului neinerţial faţă de un sistem de referinţă considerat fix;

$\vec{\omega}_0$ - viteza unghiulară instantanee a sistemului neinerţial;

$\vec{v}_r$ - viteza relativă a unei particule de masă dm poziţionată faţă de sistemul neinerţial prin vectorul de poziţie $\vec{r}$.

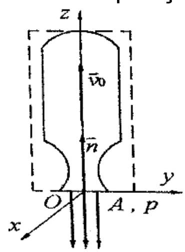

Fig. 4 Rachetă aflată în mişcare rectilinie

Cu ajutorul relaţiilor din mecanica teoretică [2] [6]:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c \,,$$
$$\vec{a}_t = \vec{a}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{r} + \vec{\omega}_0 \times \left(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\right), \tag{14}$$
$$\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}} \;\; ; \;\; \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_r \quad ,$$
$$\vec{a}_r = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial_r t^2} \quad ; \quad dm \cdot \vec{a}_a = d\vec{F} \;\; ,$$

şi ţinând seama de ecuaţia diferenţială a mişcării relative:

$$dm \cdot \vec{a}_r = d\vec{F} - dm\left[\vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}}_0 \times \vec{r} + \vec{\omega}_0 \times \left(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\right) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_r\right] \,,$$

ecuaţia (8) se poate scrie sub forma [6]:

$$\frac{\partial}{\partial_r t}\iiint_V \rho \vec{v}_r dV - \iint_S \rho \vec{v}_r \vec{v}_r \cdot \vec{n} d\sigma =$$
$$= \vec{F}_m + \vec{F}_c - \iiint_V \rho\left[\vec{a}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}}_0 \times \left(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_0\right) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_r\right] dV \tag{15}$$

relaţie ce exprimă teorema impulsului pentru mişcări raportate la sisteme neinerţiale, V fiind volumul de control delimitat de suprafaţa S .

Relaţia (13) permite determinarea vitezei v a unei rachete aflate în mişcare rectilinie în spaţiul interplanetar, dacă se presupun cunoscute:

m_0 - masa inerţială a rachetei;

$\dot{m}$ - debitul masic al gazelor de evacuare(presupus constant în timp);

p - presiunea gazelor în secţiunea de arie A a ajutajului de evacuare ;

v_g - viteza gazelor faţă de ajutaj.

Considerând un volum de control V delimitat de suprafaţa S (reprezentat punctat în figura 4), presupunând mişcarea permanentă a fluidului şi neglijând forţele masice $\left(\vec{F}_m = 0\right)$, relaţia (15) devine [6]:

$$\vec{F}_c - \iiint_V \rho \vec{v} dV = -\iint_S \rho \vec{v}_g \vec{v}_g \cdot \vec{n} d\sigma \tag{16}$$

sau

$$p \cdot A \cdot \vec{n} - m\dot{\vec{v}} = \vec{v}_g \cdot \dot{m} \tag{17}$$

unde m reprezintă masa rachetei la momentul t.

Proiectând relaţia (17) pe direcţia mişcării (axa Oz) rezultă ecuaţia diferenţială [3] [6] :

$$pA - \frac{dv}{dt}\left(m_0 - \dot{m}t\right) = -\dot{m} v_g \tag{18}$$

m_0 fiind masa inerţială a rachetei.

Separând variabilele în relaţia (18),

$$\frac{dv}{pA + \dot{m} \cdot v_g} = \frac{dt}{m_0 - \dot{m}t} \quad ,$$

şi integrând, cu considerarea condiţiei iniţiale la $t = 0$, $v = v_0$, se obţine [2]:

$$v = v_0 + \left(v_g + \frac{pA}{\dot{m}}\right) \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} \tag{19}$$

Expresia forţei de reacţie ce acţionează asupra rachetei ($\vec{F}_R = m \cdot \dot{\vec{v}}$) se obţine din relaţia (17) sub forma [6]:

$$\vec{F}_R = -\left(\frac{p}{v_g} + \dot{m}\right) \cdot \vec{v}_g \qquad (20)$$

$\vec{F}_R$ având sensul opus vitezei $\vec{v}_g$ de evacuare a gazelor prin ajutajul rachetei[3].

3. Concluzii

1. Studiul aerodinamic al zborului rachetei pe traiectorie este un demers foarte complicat și de aceea orice contribuție a specialiștilor constituie pași importanți în apropierea aparatului matematic de investigație, de fenomenele reale ce însoțesc zborul pe traiectorie.
2. Demersurile teoretice au fost completate cu investigații de laborator și simulări pe calculator.
3. Rezultatele studiilor sunt utilizate de proiectanți și fabricanți, în scopul îmbunătățirii performanțelor de zbor şi optimizării parametrilor de dirijare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Avădanei, C., *Contribuţii în studiul optimizării fenomenelor gazodinamice din dispozitivele armamentului de calibru redus*, Teză de doctorat, Academia Tehnică Militară, Bucureşti, 1999.
[2] Moraru, Fl., *Balistică exterioară şi dinamica zborului rachetei*, Editura Militară, București, 1973.
[3] Niţă, M.M., ş.a., *Avioane şi rachete. Concepte de proiectare*, Editura Militară, București, 1985.
[4] Ştefan, S., *Ecuațiile Mecanicii Fluidelor*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1996.
[5] Ştefan, S., ş.a., *Gazodinamica sistemelor reactante*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1994.
[6] Ştefan, S., ş.a., *Simularea fenomenelor mecanice şi hidraulice*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2000.

Lector univ. Dr.Ing. Constantin AVĂDANEI
membru AGIR
E-mail: costi_av_2003@yahoo.com