



A XVII-a Conferință internațională – multidisciplinară
„Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”
SEBEȘ, 2017

METODĂ HIBRIDĂ DE STUDIU PENTRU ORICE TIP DE SECȚIUNE SUPUSĂ LA TORSIUNE

Vasile NĂSTĂSESCU, Ghiță BĂRSAN

A HYBRID METHOD OF STUDY FOR ANY SECTION TYPE UNDER TORSIONAL LOADING

This paper presents a methodology regarding the numerical analysis of any section type under torsion loading. This methodology is named a hybrid one, because it practically consist in using of the membrane analogy – an experimental method - but the solving and result analysis are made by Finite Element Method (FEM). In the modelling of a structure, of a beam, applying of the torsion moment involves some difficulties especially regarding of the local stress concentration. By the methodology presented in this paper, the analysis of the shear stress field can be made with a great accuracy using FEM, without any experimental means. This methodology takes into account all the physical significations of the membrane analogy and all these are evaluated by FEM. That require of the pressure-effort ratio to be -2 is made by a thermal loading, cooling the membrane. By post-processing, the numerical result analysis can be quickly and easily made. The modelling presented in this paper can be used for any section type: whatever the shape, no matter if the section has one or more holes etc. By this methodology, the membrane analogy becomes more efficient, more versatile and more accessible for any section type.

Keywords: torsion, membrane analogy, finite elements

Cuvinte cheie: torsiune, analogia cu membrana, elemente finite

1. Introducere

Aplicarea momentului de torsiune, în analiza numerică prin Metoda Elementelor Finite (MEF), oricărui tip de secțiune, ridică

adesea unele dificultăți din cauza unor concentrări locale ale tensiunilor. Aceste dificultăți cresc atunci când este vorba de secțiuni de forme oarecare, simplu sau multiplu conexe, când este vorba de secțiunile dreptunghiulare înguste, de profilele subțiri închise sau deschise etc.

Tuturor acestor secțiuni li se pot aplica metodologia prezentată în această lucrare, care se bazează pe metoda elementelor finite, dar pe fundamentele metodei experimentale cunoscute sub numele de analogia cu membrana.

2. Fundamente ale analogiei cu membrana

Teoria elasticității aplicată studiului torsiunii barelor de secțiune oarecare, ne conduce la următoarele relații de calcul a tensiunilor tangențiale, într-un punct având coordonatele x și y , al secțiunii respective:

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1) \quad \tau_{zy} = \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2)$$

Tensiunea tangențială totală (τ_t) se calculează imediat cu relația (3), provenită din compunerea forțelor tangențiale elementare, care acționează pe elementul de arie (dA) atașat punctului respectiv:

$$\tau_t = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad (3)$$

Semnificația notațiilor din relațiile (1)...(3) este următoarea: M_t este momentul de torsiune aplicat întregii secțiuni de arie A , I_t este momentul de inerție la torsiune al secțiunii, iar funcția $\Phi = \Phi(x, y)$ este funcția tensiunilor (Prandtl). Momentul de inerție la torsiune (I_t) se calculează cu relația:

$$I_t = 2 \int_A \Phi \cdot dA \quad (4)$$

Principalele proprietăți ale funcției tensiunilor (Φ) se referă la condițiile de îndeplinit în interiorul secțiunii și pe conturul acesteia. Astfel, se știe că pe contur, $\Phi = 0$ (5)

iar în interiorul secțiunii,

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2 \quad (6)$$

Din studiul unei membrane, care în stare nedeformată se găsește în planul xOy , supusă la presiunea p , se cunoaște ecuația diferențială de echilibru a elementului infinitezimal de membrană (dA):

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{p}{H} \quad (7)$$

În relația (7), U este funcția deplanării membranei, iar H este efortul normal, care în condițiile unei solicitări ușoare și a unei grosimi mici (t) și constante a membranei, se consideră uniform și același în ambele direcții (x și y):

$$H = \sigma_x \cdot t = \sigma_y \cdot t \quad (8)$$

Privind relațiile (6) și (7), constatăm o analogie perfectă din punct de vedere matematic. Dacă membrana acoperă un gol cu forma identică a secțiunii supusă la torsiune, fiind fixată pe conturul acesteia, condiția (5) este îndeplinită imediat. Așadar, pe contur:

$$U = 0 \quad (9)$$

Condiția (6) este și ea ușor de îndeplinit, punând condiția:

$$\frac{p}{H} = -2 \quad (10)$$

În aceste condiții, relațiile (1), (2) și (4) devin:

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{M_t}{I_t} \frac{\Delta U}{\Delta y} = \frac{M_t}{I_t} \operatorname{tg} \alpha_y \quad (11)$$

$$\tau_{zy} = \frac{M_t}{I_t} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M_t}{I_t} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{M_t}{I_t} \operatorname{tg} \alpha_x \quad (12)$$

$$I_t = 2 \int_A \Phi \cdot dA = 2 \int_A U \cdot dA = 2V \quad (13)$$

în care V , reprezentând volumul închis de membrana deformată.

3. Modelarea cu elemente finite a analogiei cu membrane

Mărimile reprezentate de relațiile (11)...(13) pot fi ușor determinate prin modelarea cu elemente finite a analogiei cu membrana. Condițiile pe contur ale funcției U se aplică imediat, ușor și direct, prin restricțiile aplicate în mod curent în analiza cu MEF.

Condiția exprimată de relațiile (6) și (10) se realizează aplicând membranei o răcire cu un gradient termic. În urma analizei cu MEF a acestei solicitări, când se cunoaște (se adoptă) grosimea membranei t și se calculează tensiunile σ_x și σ_y , se stabilește presiunea p ce urmează a fi aplicată membranei:

$$p = -2H = -2\sigma_x \cdot t \quad (14)$$

În urma unei alte rulări care ia în considerație atât solicitarea termică (de răcire) cât și încărcarea mecanică cu presiunea p se obține forma deformată a membranei, adică expresia digitală a funcției U . Tot în această fază se pot obține și acele curbe de nivel ale membranei deformată, care sunt utilizate în metodologia experimentală. Evident că aceste curbe sunt de mare acuratețe, comparativ cu realizarea lor experimentală.

Un parametru important al comportării structurii, care poate fi ușor calculat, iar în majoritatea programelor profesionale se calculează în regim automat, este energia potențială totală acumulată de structură, pe care să o notăm cu W_t . În condițiile analizei cu elemente finite, această energie are expresia:

$$W_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i U_i \quad (15)$$

în care f_i este forța concentrată pe elementul finit i (ca urmare a presiunii aplicate), U_i este deplasarea pe direcția forței f_i a

elementului finit i , iar n este numărul de elemente finite. Explicând forța f_i ,

$$f_i = pA_i \quad (16)$$

unde A_i este aria elementului finit i , relația (15) devine:

$$W_t = \frac{p}{2} \sum_{i=1}^n A_i U_i = \frac{1}{2} p \cdot V \quad (17)$$

Având în vedere relația (13), putem calcula imediat momentul de inerție la torsiune I_t :

$$I_t = 2V = \frac{4W_t}{p} \quad (18)$$

Pentru obținerea rezultatelor finale și post-procesarea acestora în regim automat, se mai face o rulare, în care toate restricțiile și încărcările anterioare sunt șterse, iar structuri considerate (membranele cu forma secțiunii date) i se aplică rotirile din noduri calculate în rularea precedentă. Acestea, multiplicat cu o constantă k rezultată din relațiile (11), (12) și (18):

$$k = \frac{M_t}{I_t} = \frac{M_t \cdot p}{4 \cdot W_t} \quad (19)$$

conduc la calculul valorilor tensiunilor tangențiale și post procesarea automată a acestora pe toată secțiunea, prin opțiunea de reprezentare grafică sau prezentare a rezultatelor, privind deplasările nodale: UX pentru $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ și UY pentru $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Tensiunea totală poate fi și ea obținută automat prin post-procesarea grafică a deplasărilor nodale rezultante (totale).

Toate rulările la care m-am referit mai sus (practic 3 pași), pot fi executate prin rulări independente sau organizate consecutiv în procedură automată.

Automatizarea tuturor calculelor descrise mai sus depinde de programul folosit care este mai mult sau mai puțin generos cu opțiunile

puse la dispoziția utilizatorului, inclusiv prin limbajul propriu care permite o serie de operațiuni matematice ale parametrilor de calcul.

De regulă, mai toate opțiunile la care ne-am referit, sunt disponibile în programele profesionale de calcul prin MEF, precum Ansys, Cosmos și altele.

4. Exemple ilustrative

Primul exemplu se referă la o secțiune circulară, cu diametrul de 100 mm, supusă unui moment de torsiune de 5,00 kNm. Pentru această secțiune există și soluție analitică, prin care se găsește tensiunea tangențială maximă cu valoarea 25,4648 MPa. În figura 1 se prezintă modelul cu elemente finite al membranei care acoperă o secțiune cu forma și dimensiunile secțiunii date. Elementele finite sunt de tip SHELL. În figura 2 sunt prezentate curbele de nivel corespunzătoare deformației membranei, aceasta putând fi urmărită în figura 3. Rezultatul final este prezentat în figura 4, din care se constată valoarea maximă de 25,186 MPa a tensiunii tangențiale totale. În aceste condiții, rezultă o eroare a valorii numerice față de valoarea analitică de numai -1.095 %.

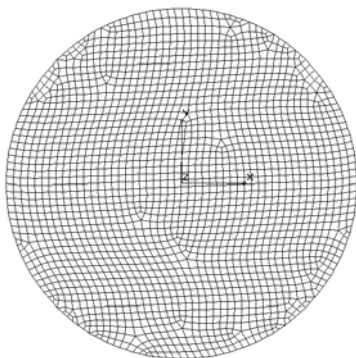


Fig.1 Modelul cu elemente finite al membranei care acoperă o secțiune cu forma și dimensiunile secțiunii date

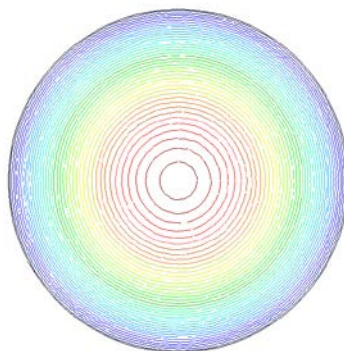


Fig. 2 Curbele de nivel corespunzătoare deformației membranei

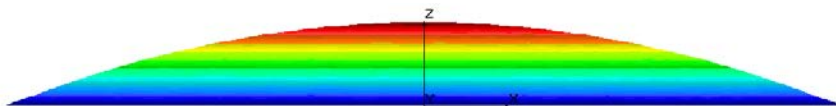


Fig. 3 Urmărirea curbelor de nivel corespunzătoare deformației membranei

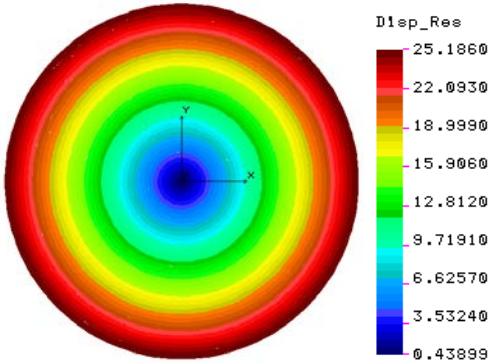


Fig. 4 Rezultatul final al deformației membranei

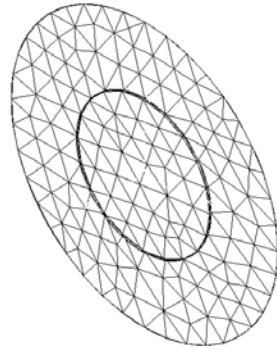


Fig. 5 Modelul cu elemente finite pentru o secțiune de tip coroană circulară

În figura 5 este prezentat modelul cu elemente finite pentru o secțiune de tip coroană circulară. Golul secțiunii este și el modelat cu elemente finite, tot de tip SHELL, dar legătura dintre conturul interior al membranei și conturul exterior al plăcii care acoperă golul este realizată prin elemente finite de tip TRUSS (bară articulată). Acestea au fost necesare pentru a cupla nodurile respective (membrană-placă) numai pe un singur grad de libertate și anume deplasările UZ (pe direcția normală la secțiune).

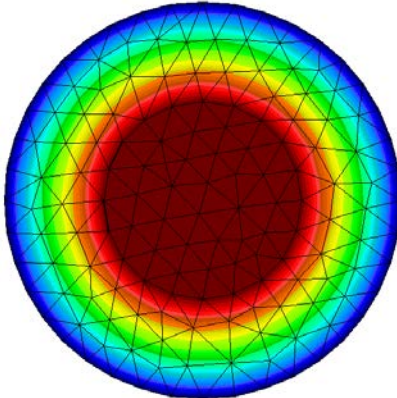


Fig. 6 Starea deformată a structurii secțiunii de tip coroană circulară

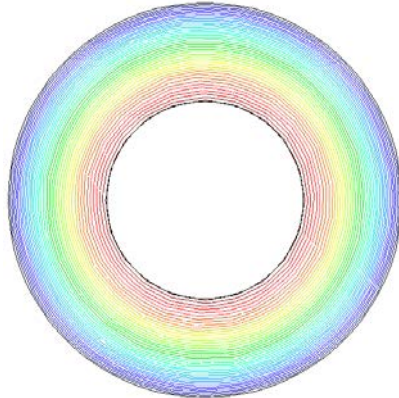


Fig. 7 Curbele de nivel corespunzătoare deformației structurii de tip coroană circulară

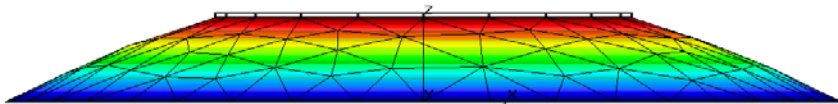


Fig. 8 Urmărirea curbelor de nivel corespunzătoare deformației structurii membranei deformate

În figurile 6, 7 și 8 se prezintă starea deformată a structurii, inclusiv curbele de nivel ale membranei deformate (figura 7). Secțiunea analizată are diametrul exterior 160 mm, diametrul interior 80 mm și este supusă unui moment de torsiune de 7536 kNm. Soluția analitică, pentru tensiunea tangențială maximă totală, este 99,949 MPa. Soluția găsită prin această metodă hibridă are o eroare de -2,99 %.

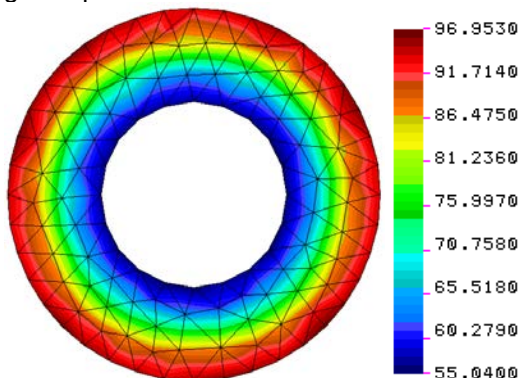


Fig. 9 Rezultatul final al deformației

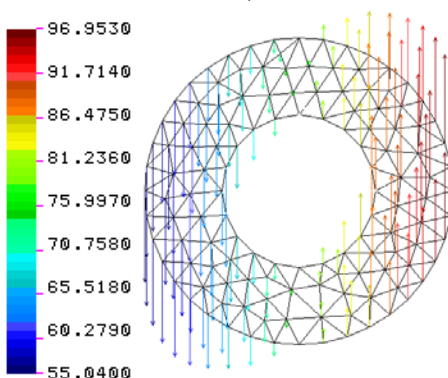


Fig. 10 Prezentarea vectorială a tensiunilor tangențiale în nodurile modelului numeric adoptat

În figura 10 sunt prezentate vectorial tensiunile tangențiale τ_{zy} în nodurile modelului numeric adoptat.

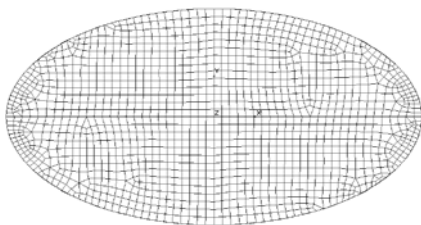


Fig. 11

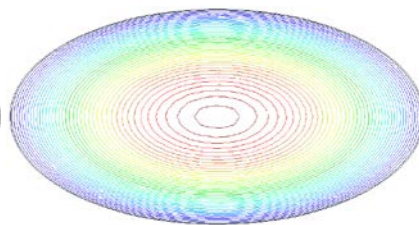


Fig. 12

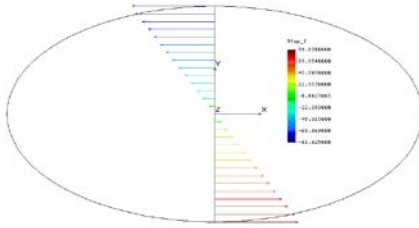


Fig. 13

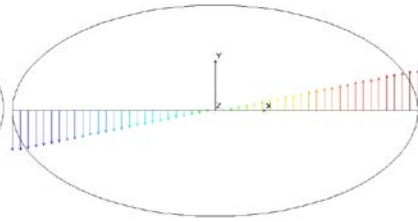


Fig. 14

Figurile 11...14 prezintă unele rezultate ale aplicării metodei hibride unei secțiuni sub formă de elipsă, având semi-axele de 50 și respectiv 26 mm. Momentul de torsiune are valoarea 5 kNm.

Distribuțiile tensiunilor tangențiale τ_{zx} și τ_{zy} de-a lungul axelor, sunt prezentate în figurile 13, respective 14, având valorile maxime 91,82 MPa, respective 47,946 MPa. Față de valorile teoretice, aceste valori prezintă erorile de 2,5 %, respective 2,1 %.

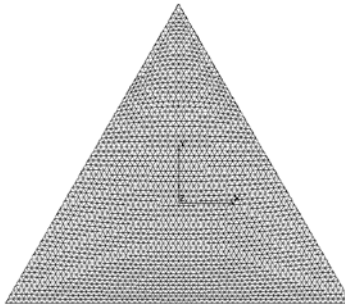


Fig. 15

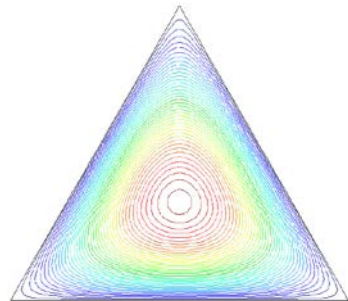


Fig. 16

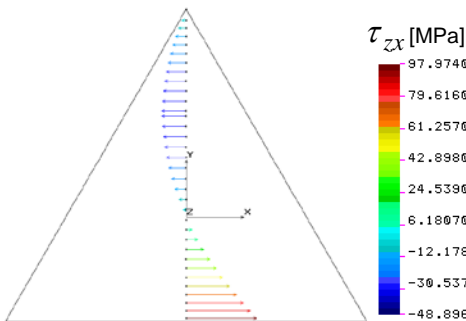


Fig. 17

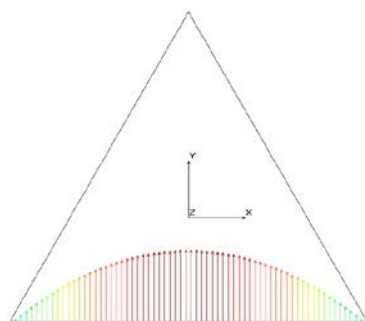


Fig. 18

Figurile 15...18 prezintă aplicarea metodei hibride de analiză a câmpului tensiunilor tangențiale, pentru secțiunea triunghi echilateral cu latura de 100 mm, supusă unui moment de torsiune de 5 kNm.

Și în acest caz, atât modul de variație cât și valorile tensiunilor au o foarte bună concordanță cu determinările analitice.

5. Concluzii

■ Metoda hibridă de analiză a câmpului tensiunilor tangențiale, prezentată în această lucrare, este precisă, versatilă și potrivită oricărui tip de secțiune (din lipsa spațiului nu au putut fi prezentate mult mai multe exemple).

■ Este mult mai exactă decât valorile care s-ar obține prin mijloacele experimentale clasice. Durata de pregătire și obținere a rezultatelor finale este mult mai mică decât procedeul experimental.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bia, C., Ilie, V., Soare, M.,V., *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.

[2] Năstăsescu, V., *Metoda elementelor finite*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1995.

[3] * * * Documentație program Ansys

[4] * * * Documentație program Cosmos/M

Prof. univ. emerit Dr. Ing. Vasile NĂSTĂSESCU
profesor asociat Academia Tehnică Militară București,
membru titular al Academiei de Științe Tehnice din România
e-mail: nastasescuv@gmail.com

General de brigadă Prof. univ. Dr. Ing. D.H.C. Ghiță BÂRSAN,
Rectorul Academiei Forțelor Terestre "Nicolae Bălcescu", Sibiu
mail: ghbarsan@gmail.com