



A XVII-a Conferință internațională – multidisciplinară  
„Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”  
SEBEȘ, 2017

## **MODIFICAREA DISTRIBUȚIEI TENSIUNILOR ÎN ZONA DEFECTULUI ȘI EFECTUL ACESTEIA ASUPRA FRECVENȚELOR PROPRII ALE GRINZII**

Luminița PĂDURARU, Gilbert-Rainer GILLICH, Marius TUFOI

### **STRESS DISTRIBUTION ALTERATION IN THE DAMAGED ZONE AND ITS EFFECT ON THE BEAM'S NATURAL FREQUENCIES**

In this paper the relation to be used for deriving the frequency of a beam with transverse crack is tested against finite elements method (FEM) simulation results. We have first analytically derived the beam deflection and compared with results achieved by means of the FEM simulation. The good concordance was found, thus the FEM model is calibrated. Afterwards, damage of different depth was introduced in the beam and the natural frequencies derived. These values were compared against results attained by applying the proposed relation and a good fit was found.

Keywords: beam, damage detection, vibration, natural frequencies, deflection

Cuvinte cheie: grindă, detectarea defectelor, vibrații, frecvențe proprii, săgeată

### **1. Introducere**

Evaluarea nedistructivă a integrității structurale este un domeniu în ingineria mecanică și civilă. Acest lucru este justificat de necesitatea de a cunoaște starea structurii, pentru a putea prezice vulnerabilitățile și pentru a evita accidentele sau chiar colapsul. Deoarece grinzile sunt cele mai

comune structuri, acestea sunt în centrul atenției oamenilor de știință și numeroase studii publicate în ultimele decenii au în centrul atenției acest subiect [1], [3].

Multe metode de control nedistructiv bazat pe vibrații analizează modificarea frecvențele proprii, a formelor modale sau a curburii modale. Sunt și metode care analizează gradul de amortizare sau încearcă să observe modificarea locală a rigidității datorată defectului. Totuși, nu există o relație matematică pentru a prezice modificarea frecvenței în funcție de un defect dat. În cercetările anterioare, colectivul laboratorului de vibrodiagnoză din universitatea „Eftimie Murgu” a reușit să determine o relație care să indice severitatea defectului pe baza pierderii capacității grinzii de a stoca energie, reflectat prin creșterea săgeții grinzii datorate defectului. În această lucrare se testează precizia relației.

## 2. Considerente teoretice

Dacă o grindă este încărcată cu o sarcină transversală, momentul încovoietor  $M$  și curbura vor lua valori diferite în diferite poziții pe grindă. Dacă  $x$  este distanța de la capătul din stânga, se poate scrie

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

Se cunoaște relația curburii  $\kappa$  într-un punct situat pe o curbă

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2)$$

unde  $\rho$  este raza de curbură, și  $dy/dx$  respectiv  $d^2 y/dx^2$  sunt derivatele de ordinul unu și doi ale curbei  $y(x)$ . În cazul încovoierii elastice a grinzii  $dy/dx$  ia valori neglijabile, deci putem scrie

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3)$$

Înlocuind relația (3) în (1) rezultă

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (4)$$

Această ecuație diferențială de ordinul doi este legea care guvernează valoarea curburii grinzii. Termenul  $EI$  reprezintă rigiditatea grinzii și este compus din modulul de elasticitate longitudinală și momentul de inerție al secțiunii grinzii.

Înmulțind ambii termeni ai relației (4) cu rigiditatea grinzii presupusă constantă, și integrând în  $x$  obținem relația

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)dx + C_1 \quad (5)$$

unde  $C_1$  este o constantă de integrare. Se știe că  $dy/dx = \theta$  este rotirea grinzii în punctul situat la distanța  $x$  de capătul din stânga, care ia valori mici, deci, putem scrie

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \approx \theta(x) \quad (6)$$

Prin urmare relația (5) devine

$$EI\theta(x) = \int_0^x M(x)dx + C_1 \quad (7)$$

Integrând din nou în  $x$  obținem relația

$$EIy = \int_0^x dx \left[ \int_0^x M(x)dx + C_1 \right] + C_2 \quad (8)$$

sau

$$EIy = \int_0^x dx \int_0^x M(x)dx + C_1x + C_2 \quad (9)$$

unde  $C_2$  este din nou o constantă de integrare. Constantele de integrare se determină prin aplicarea condițiilor de contur, care pentru grinda în consolă din figura 1 sunt:  $\theta(L) = 0$  și  $y(L) = 0$

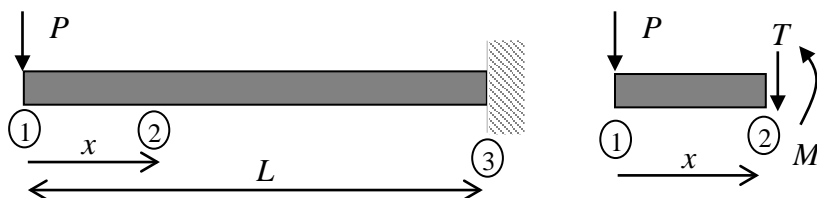


Fig. 1 Modelul grinzii în consolă

Pentru sectorul 1-2 din figura 1 momentul încovoietor se scrie

$$M = -Px \quad (10)$$

și înlocuind  $M$  în relația (4) obținem

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Px \quad (11)$$

În urma integrării

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (12)$$

și ținând cont de prima condiție de contur,  $\theta(L) = 0$ , avem

$$C_1 = \frac{PL^2}{2} \quad (13)$$

Introducând aceasta valoare în relația (9) rezultă

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + \frac{PL^2}{2} \quad (14)$$

iar în urma integrării obținem

$$EI y = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PL^2 x}{2} + C_2 \quad (15)$$

Aplicând a doua condiție de contur,  $y(L) = 0$ , rezulta

$$C_2 = -\frac{PL^3}{3} \quad (16)$$

Prin înlocuirea constantelor de integrare în relația (15) obținem ecuația fibrei medii deformată de forma

$$y(x) = -\frac{P}{6EI} (x^3 - 3L^2 x + 2L^3) \quad (17)$$

Din relația (14) obținem ecuația rotirii

$$\theta(x) = \frac{P}{2EI} (L^2 - x^2) \quad (18)$$

Atât săgeata maximă cât și rotirea maximă se obțin la capătul liber, punctul 1 în figura 1, acestea având valoarea

$$y(0) = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (19)$$

$$\theta(0) = \frac{PL^2}{2EI} \quad (20)$$

În lucrările [4]-[7] s-a demonstrat că scăderea frecvenței la apariția unui defect depinde de curbura (deci momentul încovoietor sau energia înmagazinată) în zona defectului  $d^2y/dx^2 = \phi''(x)$  și de severitatea acestuia  $\gamma(a)$ . Relația este dată de

$$f_{i-D} = f_{i-U} \left\{ 1 - \gamma(a) \cdot [\bar{\phi}_i''(x)]^2 \right\} \quad (21)$$

bara în partea superioară a simbolului curburii însemnând normalizat, iar severitatea fiind dată de relația

$$\gamma(a) = \frac{\sqrt{\delta_D(a)} - \sqrt{\delta_U}}{\sqrt{\delta_D(a)}} \quad (22)$$

În relația (22),  $\delta_U$  este săgeata grinzii intacte și  $\delta_D(a)$  este săgeata grinzii cu defect de adâncime  $a$  situat la capătul încastrat.

### 3. Verificarea numerică a validității raportului între săgeată și severitatea defectului

Simularea a vizat în primul rând calibrarea modelului FEM. În acest scop a fost simulată deformarea grinzii intacte, sub acțiunea unei forțe concentrate aplicată crescător la capătul liber. Prima forță aplicată a fost de 1N, creșterea fiind apoi graduală cu pas de 1N până la atingerea valorii maxime de 5N.

Grinda are următoarele dimensiuni: lungimea  $L = 1\text{m}$ , lățimea  $b = 0,02\text{m}$  și grosimea  $h = 0,005\text{m}$ . Rezultă aria transversală (de formă dreptunghiulară) a grinzii  $A = 0,0001\text{m}^2$  și momentul de inerție după axa slabă  $I = 2,08333 \cdot 10^{-10}\text{m}^4$ . Materialul din care este confecționată grinda este oțel, cu următoarele caracteristici mecanice: densitatea  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$ , modulul de elasticitate longitudinală  $E = 2 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$  și coeficientul lui Poisson  $\nu = 0,3$ .

Pentru simulare s-a folosit programul ANSYS, discretizarea fiind făcută cu elemente hexaedrale cu dimensiunea medie de 2 mm. Rezultatele obținute în urma simulărilor sunt prezentate în tabelul 1, unde sunt indicate și valorile obținute analitic, cu relația (19). Pentru a face comparația rezultatelor mai facilă, acestea sunt reprezentate în

figura 3 sub formă grafică; se observă excelența corelării a rezultatelor obținute analitic și prin simulare FEM.

Tabelul 1

Forța aplicată	Săgeata FEM [mm]	Săgeata analitic mm]
1N	7,987	8
2N	15,975	16
3N	23,962	24
4N	31,949	32
5N	39,937	40

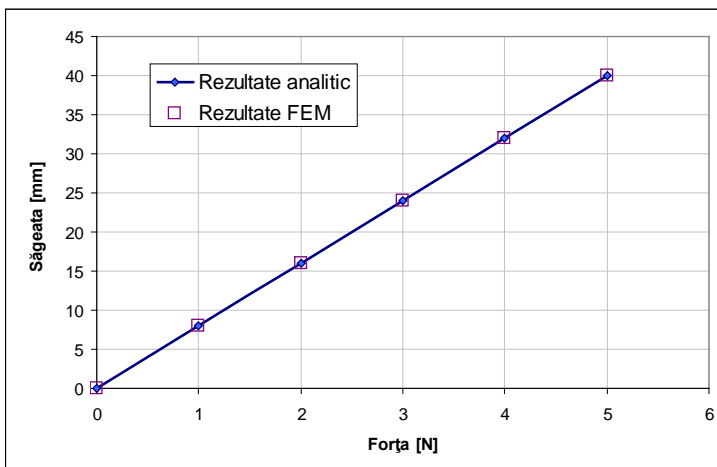


Fig. 3 Săgeata grinzii intacte determinată analitic și cu ajutorul FEM

În continuare au fost efectuate simulări pentru bara cu defect localizat la 15 mm de capătul încastat, unde  $\bar{\phi}_1''(x) \approx 1$  (pentru simplificarea analizei). Au fost considerate trei defecte cu următoarele adâncimi:  $a_1 = 0,001\text{m}$ ,  $a_2 = 0,002\text{m}$  și  $a_3 = 0,003\text{m}$ . Zona cu defect este prezentată pentru cele trei cazuri analizate în figura 4. Se observă că în jurul fisurii există o zonă în formă de V în care tensiunile sunt mici sau inexistente. De asemenea se poate observa că fibra neutră este perturbată în zona defectului pe o lungime egală cu grosimea grinzii (pentru această grindă cu defectele simulate). Aceasta ne conduce la concluzia că, pentru analiza frecvențelor proprii ale grinzii cu defect, modelul grinzii poate

conține un element de lățime egală cu grosimea grinzii și cu rigiditate scăzută. Valorile săgeților pentru cele trei cazuri de defect sunt prezentate în tabelul 2.

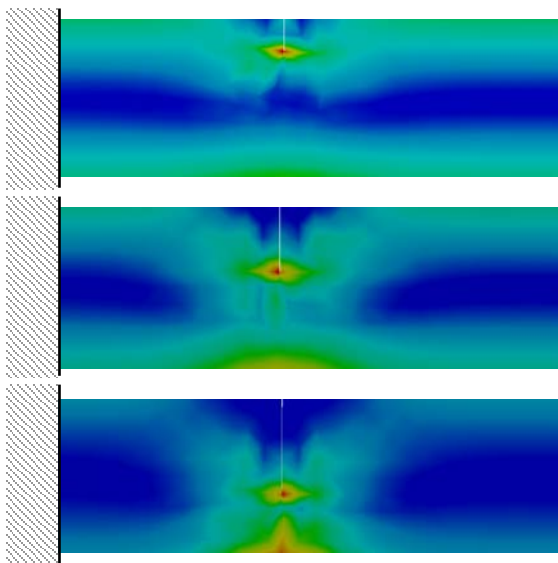
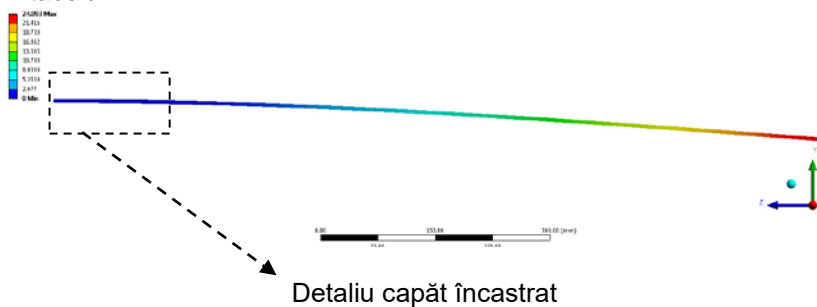


Fig. 4 Distribuția tensiunilor în secțiunea cu defect cu adâncimea de 1 mm, 2 mm respectiv 3 mm

Severitatea defectului a fost calculată pentru cele trei adâncimi ale defectului cu relația (22), valorile fiind de indicate în tabelele 2 - 4. Din aceste tabele se observă că la aceeași adâncime a defectului severitatea este aceeași, micile diferențe observate fiind determinate de precizia calculului în programul ANSYS.

Frecvențele proprii au fost determinate cu ajutorul modulului *Modal analysis*. Pentru primele șase moduri transversale de vibrație,

rezultatele sunt prezentate în tabelul 5, atât pentru bara intactă cât și pentru adâncimea defectului de 1mm. În acest tabel sunt indicate și ferențele pentru grinda cu defect calculate pe baza relației (21), referință fiind frecvența barei intacte determinată analitic. Pentru aceasta sunt utilizate trei severități determinate din săgeata grinzii, pentru trei forțe care dau: săgeata cea mai mare, o valoare apropiată de medie, respectiv săgeata cea mai mică. Se observă că în toate cazurile frecvența estimată are valoare foarte apropiată de cea determinată prin FEM pentru grinda cu defect. Aceasta se explică prin faptul că severitatea are valori foarte apropiate pentru aceeași adâncime a defectului, indiferent de încărcare.

Tabelul 2

Adâncime defect [mm]	Forța aplicată [N]	Săgeata FEM [mm]		Severitatea defectului
		Bara intactă	Bara cu defect	
1	1	7,987	8,031	0,002743
	2	15,975	16,062	0,002712
	3	23,962	24,093	0,002722
	4	31,949	32,123	0,002712
	5	39,937	40,154	0,002706

Tabelul 3

Adâncime defect [mm]	Forța aplicată [N]	Săgeata FEM [mm]		Severitatea defectului
		Bara intactă	Bara cu defect	
2	1	7,987	8,17	0,011263
	2	15,975	16,341	0,011262
	3	23,962	24,512	0,011283
	4	31,949	32,683	0,011293
	5	39,937	40,853	0,011274

Tabelul 4

Adâncime defect [mm]	Forța aplicată [N]	Săgeata FEM [mm]		Severitatea defectului
		Bara intactă	Bara cu defect	
3	1	7,987	8,612	0,03697
	2	15,975	17,225	0,036968
	3	23,962	25,838	0,036987
	4	31,949	34,45	0,036983



	5	39,937	43,063	0,036979
--	---	--------	--------	----------

Tabelul 5

Modul <i>i</i>	Frecv. FEM grindă intactă	Adâncime defect 1mm			
		Frecvența FEM	Frecvența analitic		
			Severitatea 0,002706	Severitatea 0,002722	Severitatea 0,002743
1	4,0812	4,0666	4,070157	4,07009	4,070005
2	25,573	25,491	25,50381	25,50338	25,50285
3	71,595	71,388	71,40128	71,40009	71,3986
4	140,27	139,9	139,8905	139,8881	139,8852
5	231,81	231,27	231,1828	231,1789	231,1741
6	346,16	345,46	345,2234	345,2176	345,2104

Tabelul 6

Modul <i>i</i>	Frecvența FEM grindă intactă	Adâncime defect 2mm		Adâncime defect 3mm	
		Frecvența FEM	Frecvența analitic	Frecvența FEM	Frecvența analitic
2	25,573	25,24	25,28468	24,548	24,62724
3	71,595	70,766	70,7878	69,156	68,94721
4	140,27	138,84	138,6885	136,22	135,0824
5	231,81	229,73	229,1965	226,15	223,237
6	346,6	343,47	342,2572	339,01	333,358

În tabelul 6 se prezintă valorile frecvențelor determinate prin FEM și analitic pentru adâncimi mai mari ale defectului. Pentru calculul analitic, s-a utilizat severitatea apropiată de medie pentru adâncimea respectivă. Și aici rezultatele sunt în concordanță.

#### 4. Concluzii

■ Relațiile de calcul a frecvențelor proprii ale grinzilor cu defect în funcție de frecvența în starea fără defect, respectiv relația care indică modificarea săgeții datorită defectului au fost testate pentru grinda în consolă. Rezultatele au indicat faptul că relațiile sunt precise și pot fi utilizată cu succes pentru detectarea defectelor în structuri de tip grindă în consolă.

■ Ținând cont că săgețile se scriu similar relației (19) pentru alte condiții de contur, diferind prin valoarea numerică din numitor, se poate concluziona că severitatea este aceeași pentru orice tip de rezemare a grinzii.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B., Shevitz, D.W., *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review*, Report No. LA 13070-MS, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, 1996.
- [2] Friswell, M.I., Mottershead, J.E., *Finite element model updating in structural dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1995.
- [3] Salawu, O.S., *Detection of structural damage through changes in frequency: a review*, Engineering Structures, 19(9), 1997, pp. 718-723.
- [4] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Wahab, M.A., Furdui, H., *A new modal based damage location indicator*, ISMA 2014, 15-17 septembrie 2014, Leuven, Belgia
- [5] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Amariei, D., *A Method to Detect and Assess Damage in Beams Based on Frequency Changes*, The Eleventh International Conference on Computational Structures Technology, Paper 77, 2012
- [6] Gillich, G.R., Praisach, Z.I., *Detection and Quantitative Assessment of Damages in Beam Structures Using Frequency and Stiffness Changes*, Key Engineering Materials, Vol.569, pp. 1013-1020, 2013.
- [7] Tufoi, M., Gillich, G.R., Praisach, Z.I., Iancu, V., Furdui, H., *About the Influence of Temperature Changes on the Natural Frequencies of Clamped-Clamped Euler-Bernoulli Beams*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration Vol.XI/2/2014, pp. 84-87.

Drd.Ing. Luminița PĂDURARU  
Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița  
e-mail: luminitza29@yahoo.com

Prof.Univ.Dr.Ing.Ec. Gilbert-Rainer GILLICH  
Director CSUD,  
Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița, membru AGIR  
e-mail: gr.gillich@uem.ro

Dr.Ing. Marius TUFOI  
Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița, membru AGIR  
e-mail: m.tufoi@uem.ro